עקרונות התערבות בהוראת מתמטיקה בקרב תלמידות תיכון חלשות

תקוה עובדיה

ד"ר תקוה עובדיה

בוגרת תואר ראשון *ממכללת אורנים*, תואר שני בחינוך *מתמטי מאוניברסיטת חיפה* ותואר שלישי בפקולטה לחינוך *מדע* וטכנולוגיה בטכניון.

מרצה *במכללת אורנים* ובמכללה ירושלים.

עוסקת *במחקר* ויישום של פיתוח חשיבה *מתמטית* לפתרון בעיות בקרב תלמידים (תיכון ומטה) *מתקשים במתמטיקה*, בעקרונות לשילוב טכנולוגיה בהוראה בחינוך גבוה ובלמידה *מנתונים* ונתוני עתק בחינוך *מתמטי* ומדעי.

תקציר[1]

המאמר המוצג להלן מתאר מחקר שבחן יישום עקרונות תאורטיים להוראת מתמטיקה, ליישום בהוראה בכיתות תיכון המאוכלסות בתלמידים חלשים. סביבת המחקר כללה הוראת מתמטיקה באמצעות יישום עקרונות ההוראה תאורטיים, בקרב שתי כיתות לימוד של תלמידות תיכון חלשות בתיכון. שתי הכיתות למדו את תוכנית הלימודים במתמטיקה לקראת היבחנות בבחינות בגרות בסוף שנת הלימודים. לאורך השנה תועדו כל שיעורי המתמטיקה, מניתוח השיעורים נמצא כי העקרונות התאורטיים שיושמו בכיתות בעלי פוטנציאל לקדם תהליכי פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות.

מאמר זה מתאר את העקרונות התאורטיים כפי שהם נלמדו מהספרות המחקרית, ומתאר את יישומם בפועל כתרבות כיתה שנבחנה באמצעות כלים מחקריים.

העקרונות שיושמו בתהליך ההתערבות הכיתתי במחקר זה, הם חיבור בין מסקנות מנושאי מחקרים קודמים, הנוגעים לשלושה רעיונות תאורטיים עיקריים: הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות, בניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות ויעילות שימוש בדפי דוגמאות פתורות בכיתת המתמטיקה.

מילות מפתח: עקרונות התערבות; הוראת מתמטיקה לתלמידי תיכון חלשים; קידום פתרון בעיות.

רקע תאורטי למחקר

הרקע התאורטי למחקר מתאר את שלושת הרעיונות התאורטיים שמהם נגזרו עקרונות ההתערבות: הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות, בניית קשרי דמיון בין רעיונות מתמטיים ובניית סכמות קוגניטיביות ולמידה באמצעות דוגמאות פתורות.

1 מאמר זה מעובד בחלקו מתוך עבודת מחקר שנעשתה בטכניון לצורך קבלת דוקטורט בהנחיית פרופ' בוריס קויצ'ו.

הוראת אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות במתמטיקה בקרב תלמידים חלשים

מחקר זה מתמקד בחקר סביבת למידה שאחד מעקרונותיה הוא הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות, ככלי המקדם פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידות תיכון חלשות.

לפי מחקרים המאפיינים תלמידים חלשים במתמטיקה (Geary & Brown, 1991; Geary & Widaman, 1992; Geary, Hoard, & Hamson, 1999) מאפייני החשיבה של תלמידים חלשים מתייחסים להיבטים רחבים של הלמידה, החל בקושי להבין אריתמטיקה באמצעות פעולות חשבון המבוצעות על כמויות המיוצגות באמצעות מספרים, ועד היכולת לעבד מידע, ולהסיק מסקנות לוגיות בהקשר של תובנה מספרית ובהקשר של מתמטיקה מופשטת המתארת אובייקטים ויחסים מבנים מתמטיים (Geary, 2004, 2005).

לפי גישות ההוראה המסורתיות, מורים לתלמידים חלשים פותרים עם תלמידיהם בעיות הדורשות מיומנויות חשיבה בסיסיות, ורק בשלבים מאוחרים של הלמידה, התלמידים פוגשים בעיות הדורשות מהם מיומנויות חשיבה גבוהות (כגון לוגיקה ושרשור של הסקת מסקנות, או יישום ידע מתמטי מנושאים מתמטיים מגוונים בפתרון בעיה אחת), ולכן זיכרון הלמידה הוא בטווח קצר. על פי חזן, הרכבי וקרסנטי (הרכבי, 1999, 2000; קרסנטי והרכבי, 2001; Chazan, 1996, 2000; Chazan, Callis, & Lehman, 2008; Karsenty, 2010, 2012, 2014), חוסר ניסיון במיומנות לפתור בעיות מורכבות באמצעות אסטרטגיות הוא אחד הגורמים להישגים דלים של תלמידים במתמטיקה. במחקרה של ווטסון (Watson, 2001) נמצא כי תלמידים חלשים שנחשפו להוראה של בעיות מתמטיות לא רוטיניות, הצליחו ליישם פתרון בעיות מתמטיות באמצעות אסטרטגיות המייצגות מיומנויות, כגון יישום ידע מתמטי המשלב כל מיני נושאים מתמטיים, שרשור לוגי מתמטי, או ייצוג מגוון של פתרונות לבעיה אחת. מיומנויות אלה קשורות בדרך כלל לתלמידים המצטיינים ולא לתלמידים החלשים. נוסף על כך, אחת ממסקנות המחקרים עוסקת בצורך של תלמידים חלשים לחיזוק המשמעות של הנלמד. במחקר שביצעו קויצ'ו, ברמן ומור (Koichu, Berman, & Moore, 2007a) נבנו סיטואציות מתמטיות דידקטיות, שמטרתן ליישם היוריסטיקות מסוימות כדי לקדם אוריינות יוריסטית באמצעות שימוש בתרגילים ששייכים לשגרה של תוכנית הלימודים. בין השאר נלמד ממחקרם כי תלמידים שהיו חלשים יותר במבחני ה-SAT בתחילת הניסוי, הראו התקדמות רבת משמעות לעומת שתי המדידות בסוף הניסוי, מה שהעלה את המסקנה שחוויית למידה המשלבת למידה של אסטרטגיות היוריסטיות מקדמת בהכרח פתרון בעיות של תלמידים חלשים (Koichu, Berman, & Moore, 2007b).

טענה זו היא טענה חדשה בספרות המקצועית שעוסקת בקידום פתרון בעיות בקרב תלמידים חלשים. כמו כן בדו"ח מחקר של המועצה הלאומית למדע בארה"ב (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2011) הומלצו דרכי הוראה לפיתוח מיומנויות של לומד התואמות את המאה העשרים ואחת. בין המיומנויות המומלצות התמקדו בהוראה הכוללת תהליכים ואסטרטגיות קוגניטיביים לפיתוח לומד המיומן בפתרון בעיות.

תהליך בניית סכמות מנטליות לפתרון בעיות

עיקרון ההוראה שמשמש מרכיב עיקרי בסביבת הלמידה התמקד בפיתוח מיומנות לבניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות.

שלב הכרחי לצורך פיתוח יכולת ומיומנות לפתרון בעיות הוא שלב שבו הלומד בונה בזיכרון לטווח הארוך סכמות קוגניטיביות או מודלים מנטליים, כמו רשת של קורי עכביש, הכוללים ידע קריטי שיאוחזר בעתיד במהלך פתרון בעיות חדשות (Gick & Holyoak, 1987; Sweler, 1998). פישביין (Fischbein, 1987) מתאר את הלומד כאקטיבי המפתח מודלים מנטליים של המושגים שהוא לומד. הלומד מאחד את הידע הפורמלי והבלתי פורמלי לסכמות תפיסתיות המושפעות ומעוצבות מסך כל החוויות וההתנסויות שלו. רוסו (Rossow, 2005) מתאר את הסכמה הקוגניטיבית כמרכיב שכולל פיסות ידע וקשר ביניהן. כאשר הסכמה מאורגנת נכון, ידע מסוים מתוך הסכמה יאוחזר לזיכרון העבודה בעת הצורך בהקשר הנכון. חשיבה באמצעות מודלים וסכמות יעילה בעיקר לצורך פיתוח חשיבה אנלוגית (Mayer, 1998a, 1998b; Mayer, 2004). חשיבה אנלוגית יעילה היא חשיבה שיש בה מיפוי בין שתי סכמות רלוונטיות, שהלומד מנתח אותן על פי דמיון חיצוני (מילים, מושגים), דמיון מבני (אסטרטגיות היוריסטיות, פרוצדורות ואלגוריתמים) או שניהם יחד. קירשנר, סוולר וקלארק (Kirschner, Sweller & Clark, 2006) מאפיינים את התהליך של פתרון בעיות כתהליך שבו הפותר צריך לבחור מתוך מאגר סכמות מצטבר, את הסכמה הרלוונטית הכוללת את חלקי הידע המסוים הנדרש לפתרון הבעיה הנוכחית.

ככל שהפותר מומחה יותר, הוא מזהה בקלות רבה יותר את הסכמה הרלוונטית, ובכך הוא מונע מעצמו עומס קוגניטיבי מיותר על זיכרון העבודה. כמו כן נמצא כי בזמן הפתרון, פותר לא מומחה מעמיס על זיכרון העבודה נתונים לא רלוונטיים לפתרון הבעיה. העיסוק בנתונים הרלוונטיים פחות גורם לפותר להתנהג התנהגות לא יעילה ולא חסכונית מבחינת משאבי הקשב והקוגניציה, וזו גורמת לעצירת הפתרון טרם סיומו (Jaeggi, Buschkuehl, Jonides, & Perrig, 2008; Jaeggi et al., 2007). לומד שאינו מומחה לפתרון בעיות, בבואו לפתור בעיה, סורק את מאגר הסכמות הקשור לפתרון בעיות הנמצא בזיכרון לטווח הארוך, לפי הקשר אסוציאטיבי שלאו דווקא מתאים לבעיה הזו, מאחר שאינו מצליח לזהות בקלות את הסכמה הרלוונטית שהבעיה שייכת לה. בתהליך סריקה ארוך זה, הלומד הבלתי מומחה מעמיס על זיכרון העבודה עומס מיותר או עוצר את הסריקה טרם סיומה, בגלל מגבלות של קשב או זיכרון העבודה (de Jong, 2010; de Jong & Ferguson-Hessler, 1986). מחקר זה מנסה להתגבר על בעיה זו באמצעות הוראה הכוללת בניית קשרי דמיון באופן מודרך והכרחי בין הבעיות, כך שבניית הסכמות הקוגניטיביות אינה תהליך פנימי בלתי מכוון ובלתי מודע, אלא ההפך, הלומד מתנסה במיומנות של בניית קשרים רלוונטיים (כך גם במחקרם של Kuo, Hull, Gupta, & Elby, 2013).

בניית קשרים בין בעיות מתמטיות ככלי לקידום מיומנויות לפתרון בעיות

בניית קשרים בין נושאים מתמטיים, בין בעיות מתמטיות, או בתוך אותה בעיה במרכיבים שונים שלה, היא מיומנות. מיומנות זו אמורה להיות חלק ממטרותיה של כל תוכנית לימודים במתמטיקה לפי ההמלצות של המועצה הלאומית למדע בארה"ב (NCTM, 2000). היכולת לראות קשרים בין בעיות עשויה לסייע ללומד להעביר ידע ומיומנויות מבעיות שנלמדו בעבר אל פתרון בעיות יעד חדשות לו.

היברט וגרווס (Hiebert & Grouws's in NCTM, 2011, p. 17) טוענים כי שימוש מפורש במושגים בעת הוראה מקדם למידה של מתמטיקה. כאשר תלמידי תיכון התעסקו בפתרון בעיות ושיתפו זה את זה בתוצאות הפתרון ובתהליכיהם, ההמשגה של הקשר בין הפתרונות הפכה למפורשת וכך הם קידמו את היכולת שלהם בפתרון בעיות.

למידה במונחים של קשרים היא אחד מאבני היסוד של למידת מתמטיקה, ההופכת את הלמידה למפורשת, מובנת ובעלת משמעות. גיק והוליק (Gick & Holyoak, 1980, 1983, 1987) מסבירים כי פעולה קוגניטיבית של איתור קשרי דמיון בין שתי בעיות, מפתחת את הסכמה הקוגניטיבית המושגית שקשורה בנושא הבעיה, וגם את הסכמות הקשורות באסטרטגיות לפתרון הבעיה. דיקסון ובראון (Dixon & Brown, 2012), מצאו במחקרם בקרב סטודנטים כי תוכנית לימודים הכוללת קישור מתמיד בין מושגים מתחום המתמטיקה והמדעים, מקדמת מיומנות גבוהה יותר של פתרון בעיות במתמטיקה, או בתחום המדע שלמדו הסטודנטים בקורסים. ממצא דומה התקבל במחקרים של קויו ואחרים (Kuo et al., 2013) אשר בדקו התפתחות מצבי פתרון בעיה בקרב לומדים שבנו קשרים בין בעיות מתמטיות לבעיות פיזיקליות המיישמות את הידע המתמטי. בהדיר ואוטווי (Bahadir & Ottway, 2013) מגדירים למידה אותנטית כסיטואציה הכוללת עיסוק מפורש בקשרים בין תחומי הדעת השונים בתחום, בין כל המושגים הנלמדים בנושא ובין תהליכים ואסטרטגיות לפתרון בעיות, הן בתוכנית הלימודים המוצהרת והן בתוכנית הלימודים המופעלת (ראה גם מחקר בתחום הוראת הפיזיקה של Roorda, Vos, & Goedhart, 2015).

תהליך יישום למידה או העברת למידה (Bassok & Holyoak, 1993; Detterman & Sternberg, 1993) מורכב מתת-תהליכים, שכמעט כולם דורשים מהלומד בניית קשרים בין סוגי ידע תוכן, בין מיומנויות, בין מושגים ובין אסטרטגיות לצורך בניית סכמה לפתרון בעיות (Jaeggi et al., 2008; Lobato, 2003; Reed, 1993; Robins & Mayer, 1993).

בניית קשרים בין נושאים מתמטיים, בין בעיות מתמטיות, או בתוך אותה בעיה במרכיבים שונים שלה, היא מיומנות. מיומנות זו אמורה להיות חלק ממטרותיה של כל תוכנית לימודים במתמטיקה לפי ההמלצות של המועצה הלאומית למדע בארה"ב

שימוש בדוגמאות פתורות ככלי לקידום פתרון בעיות במתמטיקה

עיקרון ההוראה השלישי ששימש חלק מסביבת הלמידה, הוא יישום בדפי דוגמאות פתורות שנבנו בהתאם לעקרונות שנמצאו במחקרים קודמים. דוגמאות פתורות הן בסיס לכל הסבר לימודי כמעט. מאייר (Mayer, 1998a, 1998b) טוען כי למידה במהלך חקר דוגמאות פתורות, מזמנת יצירת סכמה קוגניטיבית יעילה לפתרון בעיות לפי סוגיהן. רוסו (Rossow, 2005) מוסיף כי התהליך עשוי להביא אפילו לידי אוטומטיזציה של היישום, במעבר מדוגמה פתורה לבעיה חדשה דומה. לפי רוסו, דוגמה פתורה יעילה היא זו שערוכה בהתאם לשלושת השיקולים האלה: מסבירה היבטים חשובים בבעיה, מסבירה ביעילות רבה את הקשרים והיחסים של נתוני הבעיה ומתעלמת מהיבטים מיותרים של הבעיה, כדי להקטין עומס קוגניטיבי של הפותר בזמן למידה ממנה.

יש עדויות אמפיריות לכך שתלמידים יוצרים הכללה או הפשטה של תהליך, על סמך מעקב אחר שלבי פתרון של דוגמאות פתורות. כמו כן יש הסכמה בספרות העוסקת בפתרון בעיות, שתלמידים לומדים למידה אינדוקטיבית באמצעות למידה מתוך דוגמאות פתורות (Artino, 2008).

באמצעות מעקב אחרי שלבי פתרון של בעיה פתורה, התלמידים יכולים להכליל או לתפוס את התהליך הנכון לביצוע משימה או מיומנות. כאשר הדוגמה היא מסוימת ולא כללית, התלמידים מסוגלים לייצר הסברים הולמים לתהליך במהלך חקר הדוגמה (Chi, Bassok, Lewis, Reimann, & Glaser, 1989; Sweller & Cooper, 1985).

מחקרים מראים כי כאשר ניתנה לתלמידים אפשרות לבחור בין שימוש בדוגמאות פתורות ובין הנחיות והסברים כתובים, תלמידים העדיפו באופן גורף דוגמאות פתורות (LeFevre & Dixon, 1986; Pirolli & Anderson, 1985). תוצאות דומות נמצאו גם אצל חוקרים אחרים (Mevarech & Kramarski, 2003; van Gog & Paas, 2008; van Gog, Paas & van Merriënboer, 2008).

צ'י ואחרים (Chi et al., 1989) מבדילים בין תלמידים מומחים לפתרון בעיות לתלמידים חלשים בדרך שבה הם משתמשים ביעילות בדוגמאות פתורות. כאשר תלמידים מומחים נחשפו לדוגמאות פתורות במבחן, הם חזרו לדוגמה הפתורה המתאימה מתוך כוונה להבין בדרך ברורה ומוגדרת את המבנה המתמטי של תהליך הפתרון ואת הקשר לבעיה הנוכחית שעליהם לפתור. לעומתם, תלמידים חלשים חזרו לדוגמאות הפתרון מתוך כוונה כללית, ולא הגדירו לעצמם את מטרת העיון בדוגמה. קירשנר ואחרים (Kirschner et al., 2006) רואים בדוגמאות פתורות בעלות פוטנציאל להכוונה ישירה של הלומד. הן יעילות בהקטנת עומס קוגניטיבי ועשויות לכוון את התלמיד לפתח סכמה קוגניטיבית רלוונטית מינימלית מצד אחד (ידע קריטי בלבד) ומקסימלית מצד אחר (כל התוכן הרלוונטי), שתסייע לו בפתרון בעיות בעתיד. כמו כן, סוולר (Sweller, 1988, 2005, 2016) מציין במחקרו כי תלמידים חלשים נתרמים יותר מדוגמאות פתורות הכוללות אסטרטגיות לפתרון הבעיה יותר מהסברים פורמליים של המתמטיקה המופיעים בדוגמה הפתורה.

במחקר זה נגזרו משלושת הרעיונות התאורטיים שהוצגו לעיל, רשימה של עקרונות התערבות תאורטיים להוראת מתמטיקה. העקרונות נוגעים לניהול שיעור מתמטיקה בכיתת תלמידים חלשים, בהיבט הרחב של ההוראה.

מערך המחקר

מטרת המחקר הזה הייתה כפולה: לזהות יישום יעיל של עקרונות תאורטיים בכיתות מתמטיקה המאוכלסות בתלמידים חלשים. כמו כן המחקר בחן את התפתחות תהליך פתרון בעיות של התלמידים בכיתה, כתוצאה של יישום עקרונות ההוראה בידי המורה.

המאמר עונה על שאלת המחקר: מהם עקרונות ההתערבות התאורטיים המתאימים ליישום בכיתת מתמטיקה, לצורך קידום מיומנות של תלמידות תיכון חלשות לפתור בעצמן בעיות מתמטיות?

סביבת המחקר: המחקר בוצע בבית ספר תיכון שש-שנתי בכיתות י"א וי"ב, לאורך שנת לימודים אחת. אוכלוסיית המחקר כללה תלמידות חלשות בשתי כיתות, המסווגות לרמת 3 יח"ל.

כלי המחקר: לאורך שנת הלימודים תועדו כל שיעורי המתמטיקה (300) שנבנו בהתאם לעקרונות ההתערבות, ונאספו מסמכים מהשיעורים, מההערכות והעבודות שביצעו התלמידות. כמו כן

החוקרת תיעדה מחקר זה ביומנה. נתוני המחקר הם כל החומרים שנאספו מתוך ההוראה לאורך שנה בשתי כיתות לימוד בתיכון.

הנתונים נותחו באמצעות שיטת תאוריה מעוגנת בשדה מתוך שתי נקודות התבוננות: התבוננות בנתונים באמצעות עקרונות ההתערבות התאורטיים, וניסיון לזהות התאמת העיקרון התאורטי להוראה בפועל. התבוננות רוחב וחקר הדיונים שנסובו על פתרון הבעיות, וניסיון לזהות בהם מאפיינים שחוזרים על עצמם ושיש בהם זיקה לעקרונות ההתערבות. לאחר ניתוח הנתונים הוגדרו העקרונות כתאוריה העומדת בפני עצמה, ושיש לה תרומה ייחודית להוראה בכיתות תיכון שלומדים בהן תלמידים חלשים במתמטיקה.

ממצאים

הממצאים מוצגים להלן באמצעות שני היבטים עיקריים:

א. ההיבט הראשון נוגע לתשובה תאורטית על שאלת המחקר הכוללת את רשימת עקרונות ההתערבות ומאפייניה, כפי שהם התגבשו מהספרות המחקרית. כלומר רשימת עקרונות ההתערבות היא ממצא תאורטי בפני עצמו העונה על שאלת המחקר. רשימה זו שטרם המחקר הייתה תאורטית, הפכה בסופו של המחקר לרשימה יישומית להוראה.

ב. ההיבט השני נוגע לתיאור אותנטי של שני שיעורים מתקופת ההתערבות וניתוחם על פי עקרונות ההתערבות. ניתוח השיעורים מתבונן ביישום העקרונות התאורטיים ובהתפתחות תהליך פתרון בעיות של התלמידים המשתתפים במחקר.

היבט ראשון: תיאור עקרונות ההתערבות והמשגתם

להלן אסקור את עקרונות ההוראה שנוסחו טרם המחקר והוגדרו באמצעות ספרות מחקרית. עקרונות ההתערבות הנמנים להלן, הם דרכי ההוראה הסטנדרטיים והנורמות המתמטיות והסוציו-מתמטיות שביססו את מבנה ניהול השיעורים לאורך השנה. **עקרונות אלה הם ממצא העומד בפני עצמו ועונה תשובה תאורטית על שאלת המחקר.**

1. **עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד** – (לעומת הוראה מדגימה וממחישה) (Kamiski, Sloutsky, & Heckler, 2008). עיקרון זה נוגע לעובדה שבפתרון כל בעיה מכללים את האסטרטגיה שיושמה, ומשווים לבעיות אחרות הנפתרות באמצעות אותה אסטרטגיה היוריסטית. כך הופך פתרון בעיה לרעיון כללי על אודות פתרונה, ולא למקרה הפרטי של הבעיה הנתונה בלבד.

2. **בניית קשרי דמיון בין בעיות** – פעולת בניית קשרי דמיון בין בעיות נוגעת למיפוי בין שתי בעיות ויותר. המיפוי כולל השוואה בין נתונים, פרוצדורות, מושגים ותהליכים או כל רעיון דומה שראוי להשוואה (NCTM, 2000). פעולה זו מביאה את הלומד לידי מצב של הכללת הבעיה והשוואתה לבעיות אחרות, לא רק במאפיינים חיצוניים כמו ניסוח, אלא גם במאפיינים פנימיים כמו תהליך הפתרון והאסטרטגיות הכלולות בו. פעולה זו מפתחת מיומנות של פתרון בעיות מתמטיות (Dixon & Brown, 2012; Gentner, 1983; Reed, 1993). בניית קשרים מפתחת גם חשיבה אנלוגית (Robins & Mayer, 1993; Mayer, 2011).

3. **חשיבה רפלקטיבית על פתרון** – פעולה זו המובעת במפורש ועיסוק בשאלות מטה-קוגניטיביות מגבירים את הקשר וההבנה של משמעות המושגים והתהליכים הנלמדים. חשיבה רפלקטיבית מסייעת ללומד לארגן את המידע החדש שלמד על בסיס ידע קודם לצורך שימוש בו בעתיד (Chazan, 1996, 2000; Sweller, 2016).

4. **שימוש בדפי "דוגמה פתורה"** – הוא כלי ללמידה של ידע חדש על אודות אסטרטגיות לפתרון בעיות. דפי דוגמה פתורה מסייעים בארגון ידע, כגון ידע מתמטי של נוסחאות או פרוצדורות ויישומן בבעיות, או ידע על אודות אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות מתמטיות מסוג ותוכן מסוימים (Bokosmaty, Sweller, & Kalyuga, 2015; Mayer, 1998a, 1998b; Mousel, 2006; Rossow, 2005; Sweller, 2016). דוגמה פתורה מקטינה עומס על זיכרון העבודה (Sweller, 2015a, 2015b; Sweller, Ayres, & Kalyuga, 2011).

נוסף על כך, דוגמאות פתורות ממוקדות בהסבר אסטרטגיה היוריסטית לפתרון מסייעות להתרכז בנלמד, ממקדות קשב, עוזרות לבניית סכמה קוגניטיבית באמצעות זיהוי והשאלה של אלמנטים חדשים בהתאמה לקודמים ומקטינות עומס קוגניטיבי מיותר בזמן למידה (Kirschner et al., 2006; Sweller, 2016).

דוגמאות פתורות יש להתאים באופן דיפרנציאלי ללומדים בעלי ידע מתמטי שונה (Kollar et al., 2014).

5. **הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות** – נמצאה כמקדמת פתרון בעיות ומפתחת אוריינות היוריסטית לפתרון בעיות (Koichu, 2003; Koichu, 2015; Nunokawa, 2006; Nelson, 2007; Ovadiya, 2017).

6. **התלמידים במרכז** – כל הפעילות הלימודית נעשית בשיתוף התלמידים. אחת המטרות העיקריות בשיעור היא להביא תלמידים למצבי למידה כך שהם יהיו לומדים, סקרנים, יוזמים, חוקרים עצמאיים ופעילים (Chi et al., 1989). שאלה מהותית שתלמידים שואלים והיא מופנית אל המורה, חוזרת לחלל הכיתה ומופנית לקהל הלומדים כשאלה המזמינה תגובה (Mayer, 1998a, 1998b). התלמידים אחראים למצוא מענה לשאלה. יוזמות של תלמידים ופעילות שלהם מקדמת זיכרון של התכנים שנלמדו (Rossow, 2005). התלמידים מכתיבים את הקצב בכיתה, הם אחראים עליו ומכתיבים את סגנון העשייה המתמטית, את שלבי הפתרון ואת תהליכיו (Cobb, Stephan, McClain, & Gravemeijer, 2001; Cobb, Yackel, & Wood, 1989/2011; Rogoff, 1990; van Gog, & Paas, 2008; van Gog, Paas & van Merriënboer, 2008).

7. **המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה קוגניטיביים** – (המורה לא מקור הידע אלא מנטור). המורה משקפת ומתארת בקול, "מה אמרנו?", "מה עשינו?", "איך פתרנו?" (Mevarech & Kramarski, 2003) לעומת האחריות של התלמידים ליזום, לפעול ולגלות. המורה עוסקת בשונות החשיבה של התלמידים באמצעות סכום הרעיונות (Desoete, Roeyers, & De Clercq, 2002).

8. **פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה** – השקעת זמן רב יותר בניתוח הבעיה, הן כדי להבין אותה והן כדי להנחיל נורמה של ניתוח בעיה, כשלב קריטי לפתרון (Chazan, 1996, 2000). מומחים משקיעים משאבים בניתוח הבעיה יותר מבפתרונה (Mousel, 2006).

9. **השיח הכיתתי והאינטראקציה מתנהלים על פי נורמות קבועות** – התלמידים מודעים לנורמות מראש. הנורמות כוללות את עקרונות ההתערבות, כגון בניית קשרי דמיון בין בעיות מתמטיות, נתינת כינוי של אסטרטגיה היוריסטית לפתרון,

הצדקה והסבר של רעיונות בידי התלמידים, השתתפות בדיון באופן שמתאים לרעיונות העולים בו, סובלנות לרעיונות המובעים בכיתה, הקשבה לדברי עמיתים והשתתפות בפעילות הכיתתית על פי הכללים הנהוגים בכיתה (Cobb et al., 1989/2011).

כל תשעת העקרונות לעיל נוגעים לשלושה עקרונות ראשיים: הוראה מפורשת של אסטרטגיות היוריסטיות (9-8-6-5), בניית קשרי דמיון בין בעיות (9-8-6-3-2-1) ולמידה באמצעות דוגמה פתורה (9-8-5-4).

היבט שני: ניתוח שני תסריטים של שיעורים בתקופת ההתערבות

להלן אציג שני קטעי שיעורים. הדוגמאות של התסריטים מייצגות תמונה של שיעור שגרתי במהלך תקופת המחקר. כלומר, מוצגים להלן שיעורים שיש בהם מאפיינים שחזרו על עצמם בשיעורים רבים דומים באותה עת. מטרת ההדגמה היא מיפוי של רכיבים בשיעור וסיווגם לעקרונות ההתערבות, כדי להציג את קיומם ויישומם של העקרונות בשדה המחקר, כלומר ההוראה. כמו כן כל תסריט מציג התקדמות בפתרון בעיות מתמטיות בקרב הלומדים.

תסריט א׳- חקירת פונקציה

להלן מתואר בכלליות תכתוב חלקי של קטע שיעור (כ-20 דקות מתוך כ-90 דקות). בפתיחת השיעור התלמידות מבקשות לפתור בעיה שלא הצליחו לפתור בשיעורי הבית. בשיעור הקודם הן נחשפו לדוגמאות פתרון הכוללות שלוש בעיות שונות והסבר אסטרטגי למציאת משוואת משיק לגרף פונקציה. הבעיה להלן לקוחה מתוך ספרו של יקואל (2007, עמ' 244 בעיה 11):

נתונה הפונקציה: $y = x^2$

מצא באיזו נקודה על גרף הפונקציה הנתונה עלינו להעביר משיק אשר:

א. יהיה מקביל לישר $y = 4x-5$?

ב. יהיה מאונך לישר: $2x-6y+5 = 0$

להזכירך: מכפלת שיפועי שני ישרים מאונכים זה לזה היא -1

תרשים מס' 1: בעיית חקירת פונקציה (כיתה י"ב)

הבעיה ניתנה כשיעורי בית והתלמידות טענו שלא הצליחו לפתור אותה.

אני מבקשת מתלמידה מתנדבת לפתור את התרגיל שרשמתי על הלוח, ומאפשרת לה להצטייד בכל מה שהיא צריכה. (בכיתה תמיהה, וקולות מהסוג: "אבל ניסינו לפתור ולא הצליח", "חבל על הזמן תפתרי לנו המורה", "הרי לא הצלחנו בבית, איך נצליח כעת?") שקט מתוח בכיתה. אביטל ניגשת ללוח. היא מצהירה שהיא לא יודעת לפתור את הבעיה, אבל מעיזה לנסות. בזמן שאביטל מנסה לפתור את התרגיל, שלוש תלמידות בכיתה מנסות לעיין בספר, במחברת, או בדפי דוגמה פתורה. תלמידות אחרות ממתינות שאביטל תסיים לכתוב בלוח. תלמידות אחרות צופות בה מחרישות. אביטל שואלת שאלות, כגון "אני אתחיל בנגזרת? אני לא עונה. היא מתחילה בנגזרת אף שלא קיבלה מענה על השאלה ממני או מהכיתה. אביטל כותבת בלוח נגזרת. היא כותבת גם $x=2$ ואומרת בשקט כי השיפוע 4. היא מצהירה שסיימה. מתחיל דיאלוג ספונטני בכיתה:

1. **המורה:** מי זה $x=2$?
2. **אביטל:** אין תגובה.
3. **המורה:** אביטל, למה את מתייחסת רק לאלגוריתם? מה לדעתך אני מצפה ממך? מה יכול לייצג לך את הבעיה? (פונה לכיתה) מה נעשה שיסביר לנו את השאלה?
4. **רחלי:** נצייר את הפונקציה ונבין את הבעיה.
5. **המורה:** יפה. מי מוכנה לומר לי איך מציירים את y = x2?
6. תלמידות מדריכות את המורה לצייר פרבולה סימטרית בהתאם לציר ה-y שקודקודה מונח בראשית הצירים.
7. **המורה:** מה עוד נצייר?
8. **רלי:** את המקביל.
9. **יפית:** לפי נקודות [חיתוך][2] עם צירים.
10. **המורה:** מציירת בהדרכת יפית גם נקודת השקה וגם ישר מקביל לה.
11. **רחלי:** מה זה קשור לשאלה?
12. **המורה:** (לכיתה) מה זה קשור לשאלה?
13. **מעיין:** זה מסביר מה צריך לעשות. כי הנה הגרף והנה הישר ועכשיו צריך למצוא.... (לא ממשיכה)
14. **רחלי:** אבל לא אומרים מה לעשות.
15. **המורה:** לא אומרים מה לעשות?
16. **מעיין:** לא קראת נכון את השאלה. סעיפים א' וב' הם על השאלה מצא נקודה ש....
17. **רלי:** (מתבוננת בדוגמה פתורה ובתוך כך אומרת) ככה, יש שאלה על נקודה. והנקודה היא מקום שבו עובר משיק מקביל לישר הנתון ואנך לישר אחר??(את שלוש המילים האחרונות מביעה בנימת ספק)
18. **יפית:** אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'.
19. **המורה:** אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'?
20. **רלי:** מצאנו את א'. הנה נכון אביטל מצאה שיפוע. וציירנו על הלוח את המקביל, וציירנו את המקביל מנקודה על הפונקציה. עכשיו אין קשר לסעיף ב'.
21. **המורה:** מה יסביר לנו את השאלה?
22. **רלי:** ננסח בעיה פשוטה יותר דומה [לנוכחית].
23. **יפית:** נצייר אותה.
24. **המורה:** נמשיך בציור שציירנו?
25. **יפית:** נמחק את המקביל.
26. **מוריה:** מה עשיתם שם (מצביעה על הלוח) (משום מה לא מבחינים בשאלתה, לא עונים לה, ממשיכה להקשיב לדיון הכיתתי.)
27. **המורה:** מה נשרטט?
28. **יפית:** אין כזה דבר מחפשים ישר אנך.
29. **המורה:** מדוע?
30. **יפית:** כי הוא אנך למשהו.
31. **המורה:** איזה יופי, אתן מבינות מה יפית אומרת? אין ישר אוניברסלי "אנך!" לפונקציה הזו יכולים להיות אין סוף אנכים. אנחנו כאן במצב מסוים.
32. **יפית:** אנך לנקודה.
33. **רלי:** אז בטח שאין קשר בין סעיף א' ל-[סעיף] ב'. זו נקודה אחרת. (מתקנת את הספק שהביעה באמירתה בשורה 20.)
34. **המורה:** יפה! תוכיחי.
35. **המורה:** אני צריכה את עזרתכן לצייר ציור.
36. **אוריה:** "ציירי את האנך. אני מפרשת לך אותו". אוריה מדריכה את המורה לצייר אנך. המורה מציירת.
37. **רחלי:** "לא מבינה"
38. **רלי:** (לרחלי) חכי רגע, הנה אנחנו מציירים ותביני.
39. **המורה:**(הציור בלוח הסתיים) אז בואו ונכליל כל מה שעשינו עד כה. (יחד עם התלמידות מונים את כל הפעולות).

2. במאמר זה סימון בסוגריים מרובעים מציג תוספת שלי לדברי תלמידות כדי להבהיר את הנאמר, כמו כן בחרתי להשאיר את הציטוטים כפי שהם עם טעויות לשוניות.

40. (להלן תשובות שנאמרות בכיתה) קראנו את השאלה, אביטל מצאה נגזרת ונקודה, ציירנו את הבעיה, שאלנו את השאלות של הבעיה, ציירנו שוב, ניסינו להבין מה צריך למצוא, נזכרנו מה הקשר בין ישרים מקבילים, מה זה ישרים אנכים, הבנו מה צריך למצוא, חיפשנו בעיה דומה, חיפשנו את הפתרון, חיפשנו את התרגיל, מצאנו שסעיף א' וב' דומים, מצאנו במה הסעיפים שונים, מצאנו תשובה, הסברנו למה היא תשובה לבעיה.

41. **המורה:** אז התהליך הכללי שלנו לפתרון יהיה מיפוי הבעיה, ואז כאשר ברור מי הנעלם ומהם הנתונים, יש לנו בדפי הפתרון דוגמה לכל מקרה. (מורה ותלמידות) מקרה שבו x נעלם. מקרה שבו שיפוע נעלם, מקרה שבו המשיק נעלם. (כמה מהתלמידות מתבוננות בדפי הפתרון.)

42. **רלי:** בערך כמו שניחשתי לפי הציור, הנקודה הזו (מציינת את הערכים של הנקודה) שבה עובר משיק אנך.

43. **המורה:** מה הרווחנו מהציור?

44. **אוריה:** הבנו איזה תוצאות לא ייתכנו, למשל, ויכולנו להעריך מה יהיה הפתרון.

45. **המורה:** היום חזרנו על הרבה "אסטרטגיות למידה": "איך לומדים מדוגמה פתורה", "למידה מנתונים סמויים", "איך זוכרים הגדרות ששכחנו", "כללי ציור-שרטוט", מה מרוויחים מביצוע ציור-שרטוט, איך מזהים בעיה דומה לבעיה נתונה ועוד.

46. **בתיה:** (למורה) בואי נפתור עוד.

47. **יפית:** (למורה) אמרת שלא כדאי לפתור בעיות פשוטות.

48. **רלי:** יש לי בעיה, שבה יצא פתרון כמו בספר אפילו שיש לי שגיאה בדרך. זה עמוד 274 תרגיל 12.

49. **המורה:** חני תקראי את הבעיה.

50. **חני:** לא.

51. **המורה:** אין לא. לא ביקשתי פתרון. לקרוא את חייבת.

סיכום תסריט לכיתה י"ב

בטבלה מס' 1 להלן, מיפוי של סיטואציות באמצעות ציטוטים מדגים את קיומם של עקרונות ההתערבות כחלק מתהליך הלימוד:

טבלה מס' 1: תסריט שיעור לכיתה י"ב

עקרונות ההתערבות	הדגמת העיקרון באמצעות סיטואציה או ציטוט
עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד	**המורה:** (הציור בלוח הסתיים) אז בואו ונכליל כל מה שעשינו עד כה? יחד עם התלמידות מונים את כל הפעולות. [...] **המורה:** מה הרווחנו מהציור? **אוריה:** הבנו איזה תוצאות לא יתכנו למשל. ויכולנו להעריך מה יהיה הפתרון.
בניית קשרי דמיון בין בעיות	בקטע זה אין שיח מפורש על אודות מיפוי דמיון בין בעיות.
חשיבה רפלקטיבית על כל פתרון	(שורה 40) קראנו את השאלה, אביטל מצאה נגזרת ונקודה, ציירנו את הבעיה, שאלנו את השאלות של הבעיה, ציירנו שוב, ניסינו להבין מה צריך למצוא, נזכרנו מה הקשר בין ישרים מקבילים, מה זה ישרים אנכים, הבנו מה צריך למצוא, חיפשנו בעיה דומה, חיפשנו את הפתרון, חיפשנו את התרגיל, מצאנו ש-א' ו-ב' דומים, מצאנו במה הם שונים, מצאנו תשובה, הסברנו למה היא תשובה לבעיה.
שימוש בדפי "דוגמה פתורה"	(שורה 41) **המורה:** אז התהליך הכללי שלנו לפתרון יהיה מיפוי הבעיה, ואז כאשר ברור מי נעלם ומי הנתונים, יש לנו בדפי הפתרון דוגמה לכל מקרה (מקרה שבו x נעלם. מקרה שבו שיפוע נעלם, מקרה שבו המשיק נעלם).
התלמידות במרכז	שאלות של התלמידות חוזרות מהמורה אליהן. **רחלי:** מה זה קשור לשאלה? **המורה:** (לכיתה) מה זה קשור לשאלה? **יפית:** אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'. **המורה:** אין קשר בין סעיפים א' ו-ב'?
התלמידות מכתיבות את הקצב בכיתה.	**בתיה:** (למורה) בואי נפתור עוד. **המורה:** את מה? **יפית:** (למורה) אמרת שלא כדאי לפתור בעיות פשוטות. **רלי:** יש לי בעיה, שבה יצא פתרון כמו בספר אפילו שיש לי שגיאה בדרך. זה עמוד 274, תרגיל 12. **המורה:** חני תקראי את הבעיה.
הפתרון מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה.	**המורה:** אביטל, למה את מתייחסת רק לאלגוריתם? מה לדעתך, אני מצפה ממך? מה יכול לייצג לך את הבעיה? (פונה לכיתה) מה נעשה שיסביר לנו את השאלה?
מכל תרחיש לומדים אפילו מטעות.	**המורה:** "אז בזכות חני, למדנו לזנוח עוד הרגל פחות חיובי......"
המורה אחראית על סכום תהליכים מטה-קוגניטיביים. (המורה לא מקור הידע אלא מנטור.)	**המורה:** היום חזרנו על הרבה אסטרטגיות למידה, איך לומדים מדוגמה, איך קוראים פתרון, הזכרנו נתונים סמויים, איך זוכרים הגדרות ששכחנו, איך מציירים, מה מרוויחים מביצוע ציור, איך מזהים בעיה דומה לבעיה נתונה ועוד.
הכיתה מתנהלת על פי נורמות מוסכמות מראש	(שורות 49-51) **המורה:** חני תקראי את הבעיה. **חני:** לא. **המורה:** אין לא. לא ביקשתי פתרון. לקרוא את חייבת.

כיצד התסריט מציג קידום פתרון בעיה?

הטבלה לעיל מציגה את יישום עקרונות ההתערבות בשיעור, כך שהמורה מנהלת את השיעור בספונטניות בהתאם לעקרונות. כמו כן אפשר לראות כיצד בעיה שלא נפתרה בשיעורי הבית, נפתרת באמצעות דיון קבוצתי שבו כל תלמידה מוסיפה רעיון לניתוח הבעיה, לייצוג שלה ולבסוף רעיונות לדרכי הפתרון, עד לפתרון המלא. לפי התסריט, כל שאלות המורה אינן מכוונות לפתרון או לרעיונות לפתרון, אלא מנתבות את דברי התלמידות כך שהמחשבות והרעיונות שהן מעלות יקדמו ביעילות את הדיון. כמו כן על פי התסריט ההתקדמות לקראת הפתרון והבנתו, ניכר משיח התלמידות שמסבות את תשומת ליבן זו לדברי זו ומנסות להמשיך את הרעיונות שלהן באמצעות רעיונות של עמיתות לשיח.

תסריט ב׳ - הסתברות ״בעיית הכדורים״

התלמידות נדרשות לפתור בעיה בעצמן. המשימה לקוחה מתוך ספרו של יקואל (2008, עמ' 652, בעיה 3):

לפניך שלוש קופסאות. בכל קופסה ישנם ארבעה כדורים:

כדור אדום, כדור שחור, כדור לבן וכדור ירוק.

שולפים בזה אחר זה כדור אחד מכל קופסה.

א. מה ההסתברות שסדר הוצאת הכדורים יהיה אדום, שחור, לבן?

ב. מה ההסתברות שהכדורים שהוצאו יהיו בצבעים: אדום שחור ולבן אך בסדר שונה מאשר בסעיף א׳?

ג. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו כולם באותו צבע?

ד. מה ההסתברות ששלושת הכדורים שהוצאו יהיו בצבעים שונים, אך אף אחד מהם לא יהיה בצבע לבן?

תרשים מס' 2: הסתברות "בעיית הכדורים" (כיתה י"א)

52. **המורה:** נקדיש לפחות עשר דקות לעבודה עצמית.

53. **מורן:** (לאחר שניות מעטות מתפרצת) זה דומה לבעיה עם "ה.ד.ס".

תיאור כללי של הכיתה: אין חלוקה של דפי דוגמת פתרון. אין בקשה לדפים כאלה מצד התלמידות. התלמידות מדפדפות במחברת, מחפשות פתרון ובעיה דומה לבעיה הנתונה. התלמידות עסוקות בהבנת הבעיה. תלמידות קוראות לעצמן, או בזוג, או מנסות לשאול בקול או להגיב בקצרה ובשקט לשאלות שנשאלו בסביבה. המורה מסתובבת בין התלמידות, לא מגיבה להערותיהן. ליטל היחידה שמבקשת מהמורה הסבר לבעיה. תלמידות מצהירות בקול שהתחילו מציור עץ המדגם, אחרות כותבות בשקט. יש זוגות של תלמידות שבודקות זו לזו את הפתרון, יש שאלות של תלמידות המופנות למורה כדי להבין את ההבדל בין סעיף ב' לסעיף ג'. כשהתלמידות הצהירו שסיימו, הן יוזמות דיון במליאה.

54. **מורן:** זה דומה לבעיה עם ה.ד.ס.3

55. **המורה:** את בטוחה? זה דומה לבעיית ה.ד.ס? (השאלה השנייה מופנית לכיתה)

56. **רוני:** זה לא דומה כי "ה.ד.ס" זו קוביה עם שש פאות שהוטלה שלוש פעמים וכאן שלוש קופסאות [יש] ארבע[ה] כדורים.

57. **המורה:** ואז?

3. בעיה על אודות קובייה שבפאותיה המילה ה.ד.ס כתובה באותיות ה.ד.ס פעמיים על שש הפאות.

58. **רוני:** זה לא אותו מרחב מדגם כי פה המקרים אחרת.

59. **מורן:** לא קשור, התכונתי דומה בתהליך הפתרון, נעשה עץ או טבלת אירועים.

60. **המורה:** אז בואו נכליל איך נחליט מהו מרחב מדגם?

61. **רוני:** נבין אירוע אחד ואז באמצעות "או" ו"גם" ואפשר גם לזכור מי בחזקת מי. כדורים בחזקת קופסאות.

62. **המורה:** בואו נדון בתשובות. עשיתי סיבוב בכיתה, ראיתי שחלקכן ציירתן קופסאות ובהם כדורים כדי להבין את הסיטואציה. חלקכן חיפשתן בעיה דומה, חלקכן באמצעות דפדוף במחברת, אחרות שאלו את עצמן שאלות בקול, כגון "האם זה כמו בעיית ה.ד.ס?"

63. **המורה:** "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?"

64. **שלי:** אחד חלקי ארבע כפול עצמו שלוש פעמים. (התגובה של שלי היא הזמנה לפתרון, היוזמה של שלי היא לבקש מהמורה להפסיק לדבר על הבעיה ולפתור אותה.)

65. **המורה:** הכללה?

66. **ליטל:** יש מקרה אחד כזה.

67. **המורה:** מהו?

68. **שלי:** אחד חלקי שישים וארבע שזה כל המקרים.

69. **הכיתה:** מכתיבה ב"מקהלה" למורה את כל האפשרויות.

71. **המורה:** בואו נעשה זאת מסודר, מה האסטרטגיה?

71. **ג'ודי:** להתחיל מצבע [אחד]4 לעשות [לחשב לו את] כל האפשרויות ונעבור לצבע אחר.

72. התלמידות מכתיבות את הפתרון לסעיף ג'. המורה כותבת בלוח:

73. מראה לוח

74. מתפתח דיון על פתרון סעיף ד':

75. **המורה:** (פונה לגיתי ולכיתה בו בזמן): מה ההסתברות לצבעים שונים פרט ללבן?

76. **שלי:** הכול רק לא לבן.

77. **ג'ודי:** זה כמו סעיף ב' במקום ה"לבן" שהיה בסעיף ב' עכשיו זה "ירוק". כתוב צבעים שונים.

78. **שלי:** לא.

79. **ליטל:** עשיתי את זה.

80. **רוני:** כן. (מגיבה ללא של שלי)

81. **שלי:** במקום הרביעי זה שליש כאילו.

82. **ג'ודי:** (לשלי) למה? יש לך ארבע[ה] כדורים? תמיד יהיו לך ארבע[ה] כדורים!

83. **שלי:** אין ארבע[ה]. לא יהיה, כי אין לבן.

84. **ג'ודי:** יש בקופסה! תמיד יהיה ארבע, את לא מוציאה ארבע.

85. **שלי:** אז נשאר 64 [במרחב המדגם] אבל המונה ישתנה לי.

86. **ג'ודי:** מה שמשתנה זה רק דבר אחד מ[צבע]לבן [לצבע] לירוק וזהו.

87. **המורה:** ליטל, את רוצה לומר משהו?

88. **ליטל:** כן. הוצאתי את כל ההסתברויות שיכולים להביא צבעים שונים אדום שחור ירוק.

89. **המורה:** בואו נחבר בין דברי ליטל וג'ודי.

90. **ג'ודי:** נזרוק את הלבן ונוסיף לו עוד הסתברות נראה לי כמו בסעיף א'.

91. **המורה:** מהם המקרים?

92. **תלמידות** (חמש ביחד): שישה מקרים (מקריאות את כל המקרים, המורה כותבת בלוח)

4. בתוך הסוגריים המרובעים מופיעים הסברים לדברי התלמידות.

93. **ג'ודי:** (משתלטת על הדיון) אני מסתכלת בבעיה ורואה שאין משמעות לצבע. אלא יש לי ארבע[ה] כדורים ואני בוחרת שלוש[ה] אז תמיד מספר המקרים זהה. ואז הסעיף הזה לא חדש לי. (בקריאת ניצחון)

בטבלה מס' 2 להלן, מיפוי של סיטואציות באמצעות ציטוטים מדגים את קיומם של עקרונות ההתערבות כחלק ספונטני מתהליך הלימוד וההוראה:

טבלה מס' 2: תסריט שיעור לכיתה י"א

כיצד התסריט מציג קידום תהליך של פתרון בעיה?

עקרונות ההתערבות	הדגמת העיקרון באמצעות סיטואציה או ציטוט
עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד	**רוני:** נבין אירוע אחד ואז באמצעות "או" ו"גם" ואפשר גם לזכור מי בחזקת מי. כדורים בחזקת קופסאות. (שורה 93) **ג'ודי:** אני מסתכלת בבעיה ורואה שאין משמעות לצבע. אלא יש לי ארבע כדורים ואני בוחרת שלוש אז תמיד מספר המקרים זהה. ואז הסעיף הזה לא חדש לי.
בניית קשרי דמיון בין בעיות	(שורה 54) **מורן:** זה דומה לבעיה עם ה.ד.ס.[1] (שורה 63) **מורה:** "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?"
חשיבה רפלקטיבית על פתרון	(שורות 62-63) **המורה:** בואו נדון בתשובות. עשיתי סיבוב בכיתה ראיתי שחלקכן ציירו קופסאות ובהם כדורים כדי להבין את הסיטואציה, חלקכן מחפשות בעיה דומה, חלקכן באמצעות דפדוף במחברת, אחרות שאלו את עצמן שאלות בקול, כגון "האם זה כמו בעיית ה.ד.ס.?", "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?"
שימוש בדפי "דוגמה פתורה"	(תיאור כללי של הכיתה) אין חלוקת דפים של דוגמת פתרון. אין בקשה לדפים כאלה. התלמידות מדפדפות במחברת מחפשות פתרון של בעיה דומה.
התלמידים במרכז	הדיון מתמקד בשאלות ותשובות של התלמידות זו לזו.
התלמידות מכתיבות את הקצב בכיתה	(שורות 63-64) **המורה:** "האם זה כמו בעיית הכדורים בלי קופסאות?" **שלי:** אחד חלקי ארבע כפול עצמו שלוש פעמים. (התגובה של שלי היא הזמנה לפתרון, היוזמה של שלי היא לבקש מהמורה להפסיק לדבר על הבעיה ולפתור אותה)
הפתרון מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה	(שורות 54-58) **מורן:** דומה לבעיה עם ה.ד.ס. **המורה:** את בטוחה? זה דומה לבעיית ה.ד.ס.? (מופנה לכיתה) **רוני:** זה לא דומה כי "ה.ד.ס" זה קובייה עם שש פאות שהוטלה שלוש פעמים וכאן שלוש קופסאות ארבע כדורים. **המורה:** ואז? **רוני:** זה לא אותו מרחב מדגם, כי פה המקרים אחרת.
מכל תרחיש לומדים אפילו מטעות	המורה מתייחסת לקריאת הביניים של מורן לגבי הדמיון לבעיית ה.ד.ס. רוני מתקנת לשלי את הטעות אודות מרחב המדגם.
המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (המורה לא מקור הידע אלא מנטור)	(שורות 70-72) **המורה:** בואו נעשה זאת מסודר, מה האסטרטגיה? **ג'ודי:** להתחיל מצבע [אחד] לעשות [לחשב לו את] כל האפשרויות ונעבור לצבע אחר. התלמידות מכתיבות את הפתרון לסעיף ג'. המורה כותבת בלוח.
הכיתה מתנהלת לפי הנורמות המוכתבות	**המורה:** (פונה לגיתי ולכיתה בו בזמן) מה ההסתברות לצבעים שונים פרט ללבן? **שלי:** הכול רק לא לבן. **ג'ודי:** זה כמו סעיף ב' במקום ה"לבן" שהיה בסעיף ב' עכשיו זה "ירוק". כתוב צבעים שונים. **שלי:** לא. **ליטל:** עשיתי את זה. **רוני:** כן (מגיבה ללא של שלי) **שלי:** במקום הרביעי זה שליש כאילו. **ג'ודי:** (לשלי) למה, יש לך ארבע כדורים? תמיד יהיו לך ארבע כדורים! **שלי:** אין ארבע. לא יהיה כי אין לבן. **ג'ודי:** יש בקופסה! תמיד יהיה ארבע, את לא מוציאה ארבע. **שלי:** אז נשאר 64 [במרחב המדגם] אבל המונה ישתנה לי. **ג'ודי:** מה שמשתנה זה רק דבר אחד מ[צבע]לבן [לצבע] לירוק וזהו.

1. לעיל הערה 2.

הטבלה לעיל מציגה את יישום עקרונות ההתערבות בשיעור, כך שהמורה מנהלת בספונטניות את השיעור בהתאם לעקרונות. כמו כן אפשר לראות כיצד נראה תהליך של פתרון בעיה בקרב תלמידות שעד כה לא פתרו בעיות מתמטיות בעצמן. לאחר שרוב הכיתה פתרה את הבעיה, מתנהל דיון שבו יש רמות שונות של פתרון הבעיה, מהרמה האלגוריתמית שבה מציגה שלי את דרך הפתרון ועד הרמה הגבוהה ביותר של ג'ודי, שמתארת בכלליות את כל הבעיות שעשויות להיפתר באותה דרך. ג'ודי מכלילה את המקרה הפרטי של הבעיה למקרה כללי, ובאמצעות ההכללה מסבירה לכיתה את המרכיב החדש בבעיה הנוכחית לעומת סעיפים אחרים בבעיה ולעומת בעיות אחרות דומות שנפתרו בעבר בשיעורים.

סיכום שני התסריטים

שני התסריטים מדגימים שיעורים המיישמים את עקרונות ההתערבות. שני קטעי השיעור המודגמים מציגים שני פרקי זמן אחרים בתקופת ההתערבות בכל אחת מהכיתות. הקטע המתאר את כיתה י"ב מתאר פתרון של בעיה רוטינית בנושא חשבון דיפרנציאלי, שלמרות פשטותה, התלמידות לא הצליחו לפתור אותה בעצמן. יישום של עקרונות ההתערבות מהסוגים האלה: ניתוח הבעיה, הכללה של הרעיון, עיון בדפי דוגמת פתרון ומציאת קשרים בין הבעיה הנתונה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר, מקדם בכיתה רעיונות להתחלה של הפתרון שהתלמידות לא הצליחו לחשוב עליהם בעצמן. בהמשך השיעור, לאחר ניתוח הבעיה וייצוגה באמצעות שרטוט, תלמידות רבות בכיתה מבינות את הבעיה ואפילו מנסות לשער את הפתרון על פי השרטוט הכללי טרם כתיבת אלגוריתם מתאים.

תסריט כיתה י"ב מתאר קידום פתרון בעיה שהתלמידות ניסו לפתור אותה ולא הצליחו, ותסריט כיתה י"א מציג דיון על אודות כמה פתרונות של אותה בעיה, החל משלב ניתוח הבעיה וכלה בהכללה של הבעיה למקרים עתידיים.

השיעור בכיתה י"ב התרחש בראשית תקופת ההתערבות. אף שהתלמידות קיבלו דפי דוגמת פתרון הכוללים הסבר לפתרון בעיות כמו הבעיה הנתונה, הן עדיין לא מורגלות בעיון בדפי הדוגמאות, בחקירתן ובניסיון לפתור את בעיית היעד באמצעותן. נוסף על כך, התלמידות נחשפו לשינויים רבים בנורמות ניהול הכיתה. הרעיונות שהן מביעות בדיון הופכים להיות הרעיונות העיקריים של השיעור. המורה לא הוגה רעיונות משלה, אלא עוזרת להן להוציא לפועל רעיונות שהן הוגות.

בכיתה י"א התקיים השיעור בשליש האחרון של תקופת ההתערבות. הכיתה מתמודדת עם פתרון עצמי של בעיה בהסתברות. השיח ברובו נסוב על הרעיון של דמיון הבעיה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר. החל מהרעיון הראשון של מורן להשוות את פתרון הבעיה לבעיית "ה.ד.ס." וכלה ברעיונות של ג'ודי שמלמדת את הכיתה פרק בהכללה, כאשר היא הופכת כל סעיף בשאלה לשאלה כללית שאינה קשורה דווקא בכדורים והיא דומה לבעיות אחרות שנפתרו בעבר, כגון "אני מסתכלת בבעיה ורואה שאין משמעות לצבע. אלא יש לי ארבע כדורים ואני בוחרת שלוש אז תמיד מספר המקרים זהה. ואז הסעיף הזה לא חדש לי". על סמך המידע שנצפה בשיעור, ניכר כי הושגה המטרה העיקרית ליישום עקרונות ההתערבות. כל התלמידות עסוקות בעצמן בפתרון של הבעיה. הדיון על אודות דמיון של הבעיה לבעיה אחרת שנפתרה בעבר הוא טבעי וניכר שהוא חלק מהתהליך השגרתי שהכיתה חווה, וזו גם הפעולה הראשונה שתלמידות מבצעות כשלב ראשון בניתוח הבעיה. הנורמות בכיתה הן של התעסקות בניתוח הבעיה, דיון והצדקה, ציור תמונה של סיטואציית הבעיה ועוד. הדיון בכיתה י"א מתנהל בין התלמידות. התלמידות שואלות זו את זו ומגיבות זו לזו.

אף שטבלאות 1 ו-2 מציגות בשני התסריטים את יישום עקרונות ההתערבות, יש הבדל בין שני התסריטים. תסריט כיתה י"ב מציג את המורה כמנחילה את הנורמות. תסריט כיתה י"א מציג את התלמידות כמנהלות את השיעור על פי נורמות שהוטמעו והיו לחלק בלתי נפרד מהלמידה שלהן. כמו כן תסריט כיתה י"ב מתאר קידום פתרון בעיה שהתלמידות ניסו לפתור אותה ולא הצליחו, ותסריט כיתה י"א מציג דיון על אודות כמה פתרונות של אותה בעיה, החל משלב ניתוח הבעיה וכלה בהכללה של הבעיה למקרים עתידיים.

דיון ומסקנות

הוצגו לעיל שני היבטים כתשובה לשאלה: מהם עקרונות ההתערבות התאורטיים המתאימים ליישום בכיתת מתמטיקה לצורך קידום מיומנות של תלמידות תיכון חלשות לפתור בעצמן בעיות מתמטיות?

ההיבט הראשון של התשובה לשאלה הציג את עקרונות ההתערבות כממצא של המחקר הזה הנוגע לנורמות וסטנדרטים של תרבות כיתה מתמטית לפיתוח לומד עצמאי בכיתות המאוכלסות בתלמידים חלשים.

ההיבט השני התבונן, תיאר וניתח תסריטי שיעור. על פי שני התסריטים נמצא כי בשתי כיתות הלימוד, יישום של עקרונות ההתערבות הוא תהליך מעשי להוראה בכיתת מתמטיקה המקדם פתרון בעיות מתמטיות בקרב תלמידים מתקשים.

גולדין (Goldin, 2014) מציע לראות בתהליך פתרון בעיות תהליך שיש לו פוטנציאל לפתח ייצוגים מתוחכמים, תהליך שמפתח הכללה היוריסטית, מגדיל את היכולת האינטואיטיבית, מפתח המשגה מתמטית מובנית, מפתח יצירה ועשיה של פתרון בעיות, מפתח אסטרטגיות לחקר, מקדם סכמות הוכחה ומקדם תחושה חיובית לפתרון בעיות. למעשה ראוי לומר כי עקרונות ההתערבות שנמצאו במחקר הזה, תומכים בקיומם של התהליכים שמציג גולדין שוינפלד (Schoenfeld, 2014). הוא מציג חמישה ממדים לכיתת מתמטיקה מעצימת למידה, והם מכוונים לחמש קטגוריות עיקריות: הוראת מתמטיקה המכוונת לקוהרנטיות של המתמטיקה ומדגישה אותה; הוראה הלוקחת בחשבון את ההיבטים הקוגניטיביים של הפרט בהקשר של למידת מתמטיקה; הוראה שיש בה תשומת לב רבה של המורה לדרך שבה הוא מנגיש את התוכן המתמטי כך שיהיה ברור; הוראה הנוגעת לסמכות המורה והשפעתה על התפתחות הזהות של התלמיד; הוראה שיש בה תהליכי הערכה רב-שלבים בזמן ההוראה בטווח קצר וארוך; התפתחות הוראה שנובעת מתהליכי הערכה אלה.

על פי המיון להלן בטבלה מס' 3 נבחין כי חמשת הממדים שציין שוינפלד (Schoenfeld, 2014) לכיתת מתמטיקה מעצימת למידה, כוללים את עקרונות ההתערבות ששימשו את סביבת הלמידה בכיתת המתמטיקה:

טבלה 3: עקרונות ההתערבות בהשוואה לממדים של שוינפלד לכיתת מתמטיקה מעצימת למידה

ממדים של שוינפלד (Schoenfeld, 2014)	עקרונות התערבות להוראת תלמידים מתקשים בתיכון
הדגשת הקוהרנטיות של המתמטיקה	בניית קשרי דמיון בין בעיות (2)[2] שימוש בדפי "דוגמה פתורה"(4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8)
עיון בהיבטים קוגניטיביים של הלומד	עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד (1) בניית קשרי דמיון בין בעיות (2) חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה"(4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) התלמידים במרכז (6) המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (7) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8)
הנגשת המתמטיקה	עיסוק בתהליכי הפשטה של הידע הנלמד (1) בניית קשרי דמיון בין בעיות (2) חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה"(4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (7) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8) השיח הכיתתי והאינטראקציה מתנהלים על פי נורמות קבועות (9)
סמכות המורה ופיתוח זהות לומד	חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה"(4) הוראה מפורשת של מגוון אסטרטגיות היוריסטיות לפתרון בעיות (5) התלמידים במרכז (6) המורה אחראית על סכום תהליכים קוגניטיביים ומטה-קוגניטיביים (7) פתרון הבעיה מתחיל מניתוח הבעיה והבנתה (8) השיח הכיתתי והאינטראקציה מתנהלים על פי נורמות קבועות (9)
הערכה	חשיבה רפלקטיבית על פתרון (3) שימוש בדפי "דוגמה פתורה"(4)

2. המספר מייצג את עיקרון ההוראה.

המחקר הנוכחי התמקד בניסיון לנסח עקרונות להוראה המותאמים לכיתות תיכון המאוכלסות בתלמידות תיכון חלשות. המחקר על אודות מאפייני התלמיד החלש הוא מקיף, אך המחקר המתמקד בשיטות להוראה ולקידום פתרון בעיות בקרב תלמידי תיכון הוא מועט עד כי כמעט לא קיים. המחקר הנוכחי שאסף נתונים לאורך שנת לימודים שלמה והוראה בשתי כיתות תיכון, מציג עקרונות תאורטיים שהפכו לשיטה מעשית המקדמת פתרון בעיות בקרב תלמידי תיכון חלשים. בשונה מן מחקרים שאפשר ליישם את רעיונותיהם במצומצם בשדה החינוך המסורתי, מחקר זה מציג שיטה שאפשר ליישמה בכל כיתת תיכון ובהתאם לתוכנית הלימודים של משרד החינוך.

כמו כן נמצא כי העקרונות שנמצאו בספרות והותאמו להתערבות, עולים בקנה אחד עם עקרונות שניסח שוינפלד (Schoenfeld, 2014) לכיתת מתמטיקה מעצימת למידה. אחד האתגרים של הוראת מתמטיקה הוא לפתח תלמידים פותרי בעיות עצמאיים (NCTM, 2011), והוא מומש במחקר הנוכחי באמצעות עקרונות ההתערבות. גולדין (Goldin, 2014) מציג את תהליך פתרון הבעיות כתהליך המקדם בניית סכמות לפתרון בעיות, אך לא מתאר את הדרך שבאמצעותה אפשר לבנות סכמה קוגניטיבית למתקשים בפתרון בעיות. עקרונות ההוראה שנמצאו למחקר הזה, נמצאו כמקדמות בניית סכמה קוגניטיבית לפתרון בעיה באמצעות קידום חשיבה היוריסטית של פתרון בעיות ופיתוחה, כך שהם משמשים השלמה ותשתית ליישום רעיונותיו של גולדין.

רשימת מקורות

הרכבי, א' (1999). **תלמידים חלשים במתמטיקה - סיכום מחקר: דו"ח מוגש למשרד החינוך.** רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

הרכבי, א' (2000). **אפיוני למידה וחשיבה של תלמידי רמות ג' (חט"ב): דו"ח ראשוני, מוגש למשרד החינוך.** רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

יקואל, ג' (2007). **מתמטיקה במבנה הצבירה לתלמידי 3-4 יחידות לימוד: שאלון ג' 035003** (מהדורה מעודכנת). קריית טבעון: משבצת.

יקואל, ג' (2008). **מתמטיקה במבנה הצבירה לתלמידי 3 יחידות לימוד: שאלון ב' 035002** (מהדורה מעודכנת). קריית טבעון: משבצת.

קרסנטי, ר' והרכבי, א' (2001). **אפיוני למידה וחשיבה של תלמידי רמות ג' (חט"ב): דו"ח פעילות לשנת 2001, מוגש למשרד החינוך.** רחובות: המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע.

Artino, A. R., Jr. (2008). Cognitive load theory and the role of learner experience: An abbreviated review for educational practitioners. *AACE Journal, 16*(4), 425-439.

Bahadir, M. E., & Ottway, J. R. (2013). Authentic teaching and learning through extra-curricular activities. *Technology Interface International Journal, 13*(2), 87-95.

Bassok, M., & Holyoak, K. J. (1993). Pragmatic knowledge and conceptual structure: determinants of transfer between quantitative domains. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 68-98). Westport, CT: Ablex Publishing.

Bokosmaty, S., Sweller, J., & Kalyuga, S. (2015). Learning geometry problem solving by studying worked examples: Effects of learner guidance and expertise. *American Educational Research Journal*, *52*(2), 307-333. doi: 10.3102/0002831214549450

Chazan, D. (1996). Algebra for all students? The algebra policy debate. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 455-477. doi: /10.1016/S0732-3123(96)90030-9

Chazan, D. (2000). *Beyond formulas in mathematics and teaching: Dynamics of the high school algebra classroom*. New York: Teachers College Press.

Chazan, D., Callis, S., & Lehman, M. (2008). *Embracing reason: Egalitarian ideals and teaching of high school mathematics*. New York: Routledge.

Chi, M. T. H., Bassok, M., Lewis, M.W., Reimann, P., & Glaser, R. (1989). Self- explanations: How students study and use examples in learning to solve problems. *Cognitive Science*, *13*(2), 145-182. doi: 10.1016/0364-0213(89)90002-5

Cobb, P., Stephan, M., McClain, K., & Gravemeijer, K. (2001). Participating in classroom mathematical practices. *The Journal of the Learning Sciences, 10*(1-2), 113-163.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1989/2011). Young children's emotional acts while engaged in mathematical problem solving. In E. Yackel, K. Gravemeijer, & A. Sfard (Eds.), *A journey in mathematics education research – insights from the work of Paul Cobb* (pp. 41-71). Dordrecht: Springer. doi: 10.1007/978-90-481-9729-3_5

de Jong, T. (2010). Cognitive load theory, educational research, and instructional design: Some food for thought. *Instructional Science*, *38*(2), 105-134. doi: 10.1007/s11251-009-9110-0

de Jong, T., & Ferguson-Hessler, M. G. (1986). Cognitive structures of good and poor novice problem solvers in physics. *Journal of Educational Psychology*, *78*(4), 279-288. doi: 10.1037/0022-0663.78.4.279

Desoete, A., Roeyers, H., & De Clercq, A. (2002). The measurement of individual metacognitive differences in mathematical problem solving. In M. Valcke, D. Gombeir, & W. C. Smith (Eds.), *Learning styles: Reliability and validity. Proceedings of the 7th annual ELSIN Conference* (pp. 93-102). Ghent, Belgium: Academia Press.

Detterman, D. K., & Sternberg, R. J. (Eds.). (1993). *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction*. Norwood, N.J.: Ablex Publishing Corporation.

Dixon, R. A., & Brown, R. A. (2012). Transfer of learning: Connecting concepts during problem solving. *Journal of Technology Education, 24*(1), 2-17.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: D. Reidel.

Geary, D. C. (2003). Arithmetical development: Commentary and future directions. In A. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills: Constructing adaptive expertise* (pp. 453-464). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 4-15.

Geary, D. C., & Brown, S. C. (1991). Cognitive addition: Strategy choice and speed-of processing differences in gifted, normal, and mathematically disabled children. *Developmental Psychology*, *27*(3), 398-406. doi: 10.1037/0012-1649.27.3.398

Geary, D. C., & Widaman, K. F. (1992). Numerical cognition: On the convergence of componential and psychometric models. *Intelligence*, *16*(1), 47-80.

Geary, D. C., Hoard, M. K., & Hamson, C. O. (1999). Numerical and arithmetical cognition: patterns of functions and deficits in children at risk for a mathematical disability. *Journal of Experimental Child Psychology*, *74*(3), 213-239.

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, *7*(2), 155-170. doi: 10.1207/s15516709cog0702_3

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1980). Analogical problem

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007a). Heuristic literacy development and its relation to mathematical achievements of middle school students. *Instructional Science*, *35*(2), 99-139. doi: 10.1007/s11251-006-9004-3

Koichu, B., Berman, A., & Moore, M. (2007b). The effect of promoting heuristic literacy on the mathematic aptitude of middle-school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38*(1), 1-17. doi: 10.1080/00207390600861161

Kollar, I., Ufer, S., Reichersdorfer, E., Vogel, F., Fischer, F., & Reiss, K. (2014). Effects of collaboration scripts and heuristic worked examples on the acquisition of mathematical argumentation skills of teacher students with different levels of prior achievement. *Learning and Instruction 32,* 22-36. doi: 10.1016/j.learninstruc.2014.01.003

Kuo, E., Hull, M. M., Gupta, A., & Elby, A. (2013). How students blend conceptual and formal mathematical reasoning in solving physics problems. *Science Education, 97*(1), 32-57. doi: 10.1002/sce.21043

LeFevre, J. A., & Dixon, P. (1986). Do written instructions need examples? *Cognition and Instruction*, *3*(1), l-30.

Lobato, J. (2003). How design experiments can inform a rethinking of transfer and vice versa. *Educational Researcher*, *32*(1), 17-20. doi: 10.3102/0013189X032001017

Mayer, R. E. (1998a). Cognitive, metacognitive, and motivational aspects of problem solving. *Instructional Science, 26*(1-2), 49-63. doi: 10.1023/A:1003088013286

Mayer, R. E. (1998b). *Thinking, problem solving, cognition* (2nd ed.). New York: W. H. Freeman.

Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, *59*(1), 14-19. doi: 10.1037/0003-066X.59.1.14

Mevarech, Z. R., & Kramarski, B. (2003). The effects of metacognitive training vs. worked-out examples on students' mathematical reasoning. *British Journal of Educational Psychology, 73*(4), 449-471. doi: 10.1348/000709903322591181

Mousel, S. (2006). *Bad medicine: Homework or headache? Responsibility and accountability for middle level mathematics students.* Action Research Projects, 51, University of Nebraska-Lincoln.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: Author.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2011). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Nelson, B. C. (2007). Exploring the use of individualized, solving. *Cognitive Psychology*, *12*(3), 306-355. doi: 10.1016/0010-0285(80)90013-4

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1983). Schema induction and analogical transfer. *Cognitive Psychology*, *15*(1), 1-38.

Gick, M. L., & Holyoak, K. J. (1987). The cognitive basis of knowledge transfer. In S. M. Cormier & J. D. Hagman (Eds.). *Transfer of learning: Contemporary research and applications* (pp. 9-46). San Diego, CA: Academic Press.

Goldin, G. A. (2014). Perspectives on emotion in mathematical engagement, learning, and problem solving. In R. Pekrun, & L. Linnenbrink-Garcia (Eds.), *International handbook of emotions in education* (pp. 391-414). New York: Routledge.

Jaeggi, M., Buschkuehl, M., Jonides, J., & Perrig, W. (2008). Improving fluid intelligence with training on working memory. *PNAS*, *105*(19), 6829-6833. doi: 10.1073/pnas.0801268105

Jaeggi, S. M., Buschkuehl, M., Etienne, A., Ozdoba, C., Perrig, W. J., & Nirkko, A. C. (2007). On how high performers keep cool brains in situations of cognitive overload. *Cognitive, Affective & Behavioral Neuroscience, 7*(2), 75-89. doi: 10.3758/CABN.7.2.75

Kamiski, J., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science*, *320*(5875), 454-455. doi: 10.1126/science.1154659

Karsenty, R. (2010). Nonprofessional mathematics tutoring for low achieving students in secondary schools: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 74*(1), 1-21. doi: 10.1007/s10649-009-9223-z

Karsenty, R. (2012). Supporting mathematics teachers of at-risk students: A model of personalized professional development. In *Monograph: Mathematics teacher retention* (pp.93-100). Los Angeles, CA: California Mathematics Project.

Karsenty, R. (2014). Mathematical Ability. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education* (pp. 372-375). Dordrecht: Springer.

Kirschner, P., Sweller, J., & Clark, R. E. (2006). Why minimal guidance during instruction does not work: An analysis of the failure of constructivist, discovery, problem-based experiential, and inquiry-based teaching. *Educational Psychologist, 41*(2), 75-86.

Koichu, B. (2003). *Junior high school students' heuristic behaviors in mathematical problem solving* (Doctoral dissertation). Technion, Haifa.

Koichu, B. (2015). Towards a confluence framework of problem solving in educational contexts. In K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *CERME9: Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2668-2674). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague.

Sweller, J. (2015b). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition, 5*(4), 360-367. doi: 10.1016/j.jarmac.2015.12.002

Sweller, J. (2016). Working memory, long-term memory, and instructional design. *Journal of Applied Research in Memory and Cognition, 5*(4), 360–367. doi: 10.1016/j.jarmac.2015.12.002

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning Algebra. *Cognition and instruction, 2*(1), 59-89.

Sweller, J., Ayres, P., & Kalyuga, S. (2011). Measuring cognitive load. In *Cognitive load theory* (pp. 71-85). Springer, New York, NY.

Sweller, J., van Merrienboer, J. J. G., & Paas, F. G. W. C. (1998). Cognitive architecture and instructional design. *Educational Psychology Review*, *10*(3), 251-296. doi: 10.1023/A:1022193728205.

van Gog, T., & Paas, F. (2008). Instructional efficiency: Revisiting the original construct in educational research. *Educational Psychologist, 43*(1), 16-26. doi: 10.1080/00461520701756248

van Gog, T., Paas, F., & van Merriënboer, J. J. G. (2008). Effects of studying sequences of process-oriented and product-oriented worked examples on troubleshooting transfer efficiency. *Learning and Instruction*, *18*(3), 211-222. doi: 10.1016/j.learninstruc.2007.03.003

Watson, A. (2001). Low attainers exhibiting higher-order mathematical thinking. *Support for learning, 16*(4), 179-183. doi: 10.1111/1467-9604.00215

reflective guidance in an educational multi-user virtual environment. *Journal of Science Education and Technology, 16*(1), 83-97. doi: 10.1007/s10956-006-9039-x

Nunokawa, K. (2006). Using drawings and generating information in mathematical problem solving. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 2*(3), 33-54. doi: 10.12973/ejmste/75463

Ovadiya, T. (2017). Constructing similarity connections between mathematics problems: The case of "weak" high school students. In B. Kaur, W. K. Ho, T. L. Toh, & B.H. Choy (Eds.), *Proceedings of the 41st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p. 71). Singapore: PME.

Pirolli, P. L., & Anderson, J. R. (1985). The role of practice in fact retrieval. Journal of Experimental Psychology: *Learning, Memory, and Cognition*, *11*(1), 136-153. doi: 10.1037/0278-7393.11.1.136

Reed, S. K. (1993). A schema-based theory of transfer. In D. K. Detterman & R. J. Sternberg (Eds.), *Transfer on trial: Intelligence, cognition, and instruction* (pp. 39-67). Norwood, N.J.: Ablex.

Robins, S., & Mayer, R. E. (1993). Schema training in analogical reasoning. *Journal of Educational Psychology*, *85*(3), 529-538. doi: 10.1037/0022-0663.85.3.529

Rogoff, B. (1990). Explanations of cognitive development through social interaction: Vygotsky and Piaget. In B. Rogoff (Ed.), **Apprenticeship in thinking: Cognitive development in social context** (pp. 137-150). New York: Oxford University Press.

Roorda, G., Vos, P., & Goedhart, M. J. (2015). An actor-oriented transfer perspective on high school students' development of the use of procedures to solve problems on "rate of change". *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(4), 863-889. doi: 10.1007/s10763-013-9501-1

Rossow, M. P. (2005). Theoretical basis for learning statics by studying worked examples. Retrived from http://www.ce.siue.edu/examples/Worked_examples_Internet_text-only/Home_page/Theoretical_basis.pdf

Schoenfeld, A. H. (2014). What makes for powerful classrooms, and how can we support teachers in creating them? A story of research and practice productively intertwined. *Educational Researcher, 43*(8), 404-412. doi: 10.3102/0013189X14554450

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive Science*, *12*(2), 257-285. doi: 10.1207/s15516709cog1202_4

Sweller, J. (2005). The redundancy principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (pp. 159-167). Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sweller, J. (2015a). In academe, what is learned, and how is it learned? *Current Directions in Psychological Science*, *24*(3), 190-194. doi: 10.1177/0963721415569570