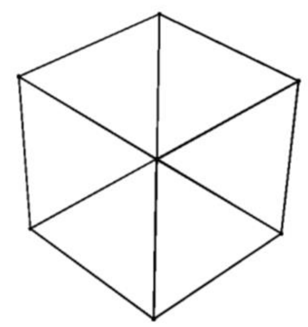
הבנה של סרטוטים דו-ממדיים המתארים אובייקטים תלת-ממדיים בהוראת הגאומטריה במרחב

מירלה וידר   אבי ברמן   בוריס קויצו

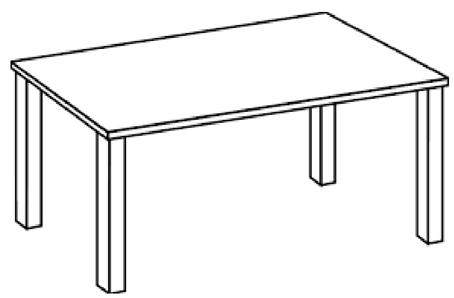
מבוא

הישגים גבוהים בגאומטריה מרחבית בבית הספר התיכון, מיוחסים לעתים קרובות ליכולתו של הלומד "לראות במרחב", ולדמות בעיני רוחו אובייקטים גאומטריים תלת-ממדיים מתוך הסרטוטים הדו-ממדיים המוצגים בפניו (Gutiérrez, 1996). אולם, הדבר אינו תמיד טבעי וקל. כיצד נוכל למשל לזהות בוודאות את האובייקט באיור 1? האם מדובר במשושה המצוי במישור הדף? האם ישנה כאן פירמידה ישרה עם בסיס משושה במבט מלמעלה או מלמטה? ייתכן ונוכל לראות כאן קובייה? כל האינטרפרטציות הללו הן כמובן אפשריות ונכונות.



איור 1: מהו האובייקט שבאיור?

על מנת לזהות אובייקטים במרחב, המוח האנושי משלים אינפורמציה החסרה בסרטוט. כך למשל, כאשר אנחנו רואים תמונה של שולחן (ראו איור 2), המוח מעבד את המידע ואנחנו מפרשים את התמונה כתמונה של שולחן מלבני, למרות שלוח השולחן שבתמונה הוא בצורת מקבילית.



איור 2: תמונה של שולחן. למרות שלוח השולחן שבתמונה הוא בצורת מקבילית, אנחנו מפרשים את התמונה כתמונת שולחן מלבני.

רקע תאורטי

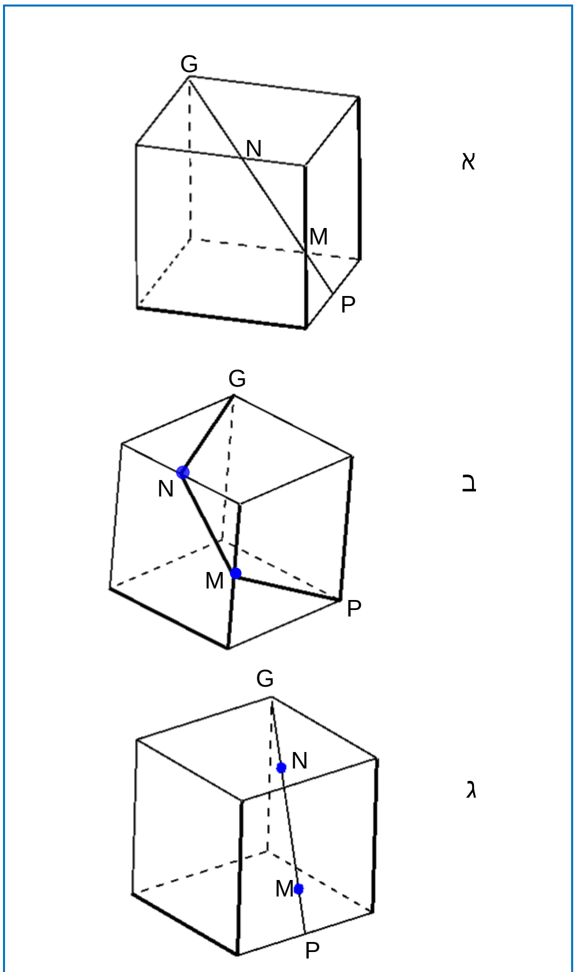
השימוש בסרטוטים דו-ממדיים לתיאור סיטואציות גאומטריות תלת-ממדיות, מסתמך על ההנחה הנאיבית כי לקוגניציה האנושית יכולת גבוהה ביותר של זיהוי תבניות וסינתזה, המאפשרת להשלים בנקל אינפורמציה שאבדה במעבר מתלת-ממד אל דו-ממד (Gutiérrez, 1996; Christou, Pittalis, Mousoulides & Jones, 2005). אולם לומדים רבים אינם מודעים כלל לאבדן המידע, ומצויים תחת האשליה שהסרטוט הדו-ממדי אכן מייצג נאמנה את האובייקט התלת-ממדי (Parzysz, 1988). Kali & Orion (1996) חקרו תפיסה של מבנים גאולוגיים מתוך סרטוטים דו-ממדיים, ומצאו כי סטודנטים רבים מסתמכים אך ורק על מידע חזותי חיצוני, ואינם מצליחים "לחדור" את הסרטוטים הדו-ממדיים ולבנות ייצוגים

מנטליים תלת-ממדיים רצויים. במקביל, בגאומטריה מרחבית, Bakó (2003) מצאה, כי תלמידי תיכון רבים נוטים להסתמך על היבטים ויזואליים בסרטוט, ולהתעלם מהיקשים לוגיים דידקטיים, כאשר בקובייה שקופה הם ממקמים את הנקודות G, N, M ו- P על קו ישר אחד (ראו איור 3א), למרות שבפועל לא ניתן לדעת בוודאות את מיקום הנקודות (ראו איורים 3ב ו- 3ג).

נראה כי לקונפליקט שבין היבטים צורניים וקונספטואליים של סיטואציה גאומטרית, הקיים בגאומטריה במישור, נוסף במרחב גם קונפליקט עם התפיסה הוויזואלית (Widder & Gorsky, 2012; Ferrara & Mammana, 2014). תפיסה חזותית (perception) היא תהליך של סיגול מודעות, ארגון והפקת משמעות מתוך נתונים חזותיים חושיים (Kirby, 2008). תהליך זה מושפע מגורמים רבים, חלקם גורמים פנימיים ללומד הקשורים בניסיון קודם, בידע מקדים, בציפיות וביכולות האישיות של הלומד (Arcavi, 2003; Kirby, 2008), בעוד שגורמים אחרים חיצוניים ללומד, וקשורים לבעיה הגאומטרית עצמה ולדרך בה היא מוצגת (Parzysz, 1988; Kali & Orion, 1996; Gutiérrez, 1996; Christou et al., 2005).

תפיסה חזותית (perception) היא תהליך של סיגול מודעות, ארגון והפקת משמעות מתוך נתונים חזותיים. תהליך זה מושפע מגורמים רבים, חלקם גורמים פנימיים ללומד הקשורים בניסיון קודם, בידע מקדים, בציפיות וביכולות האישיות של הלומד, בעוד שגורמים אחרים חיצוניים ללומד, וקשורים לבעיה הגאומטרית עצמה ולדרך בה היא מוצגת המרחבית.

הבנה טובה יותר של המכשולים החזותיים בהם נתקל הלומד, של מרכיביהם ושל האינטראקציה ביניהם, עשויה להיות המפתח לשיפור הוראת הגאומטריה במרחב. להבנה של תופעה כה מורכבת נחוצים צעדים קטנים וזהירים. התמקדות בצורות גאומטריות פשוטות, המוכרות לתלמידי התיכון, עשויה להגדיל את הסיכוי להבנה טובה יותר של התופעה. מסיבה זו החלטנו להתמקד במחקר שלנו בקוביות, ובצורות בסיסיות, כגון משולשים ומרובעים, הכלולים בהן (להלן, מבני עזר). מחקר זה מנסה לבחון את הקושי החזותי הטמון בסרטוטים דו-ממדיים של קוביות עם מבני עזר, תוך התבוננות בשלושה היבטים ויזואליים המהווים גירויים ראשוניים לתפיסה החזותית: (1) מידע מטעה המופיע בסרטוט, (2) מידע תומך בהבנה המופיע בסרטוט, ו- (3) האוריינטציה של הסרטוט. החלק הראשון של המאמר עוסק בתיאור והבהרה של היבטים ויזואליים אלו. החלק השני מתאר את האופן בו נערך המחקר וכולל גם את תיאור הבנייה של כלי המאפשר השוואה בין הקושי החזותי התאורטי לבין הקושי החזותי המתגלה בפועל. החלק האחרון במאמר דן בתוצאות המחקר ובהשלכות אפשריות שלו על ההוראה של גאומטריה במרחב.



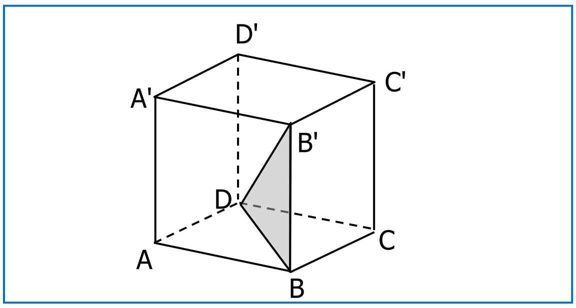
איור 3: דרכים אפשריות למקם את הנקודות N ו- M:
א. הסרטוט המקורי,
ב. אפשרות למיקום הנקודות N ו- M,
ג. אפשרות נוספת למיקום הנקודות.

מידע מטעה Potentially Misleading Information (PMI)

סרטוט המלווה בעיה בגאומטריה במרחב, נועד לתמוך בהבנה הנכונה של הסיטואציה הגאומטרית התלת-ממדית המתוארת. למרות זאת, בשל היותו תוצר של הטלה מקבילית, הסרטוט הדו-ממדי אינו מתאר במדויק את האובייקט התלת-ממדי המקורי, ומכיל מידע גרפי העלול להטעות את הלומד **(Potentially Misleading Information - PMI)**. מידע מטעה (PMI) מורכב משתי

קטגוריות של מאפיינים גאומטריים: (1) מידע נכון החסר בסרטוט; (2) מידע שגוי אשר נוסף לסרטוט בשל ההטלה המקבילית אל המישור. לדוגמה, אם נניח כי הסרטוט באיור 1 מייצג קובייה, הרי שקדקוד אחד של הקובייה אינו נראה בסרטוט (מידע חסר). יחד עם זאת, מופיעה בסרטוט אלומה של קווים ישרים דרך קדקוד אחר, אשר אינה קיימת במציאות (מידע מטעה שנוסף לסרטוט בשל זווית ההתבוננות).

אולם, בעיות טיפוסיות בגאומטריה במרחב בביה"ס התיכון אינן כה פשוטות, ומכילות לרוב מבני עזר. מבנים אלו עשויים להוסיף מידע מטעה (PMI). כך לדוגמה, הקובייה ABCDA'B'C'D' באיור 4 מכילה מידע מטעה נוסף: המשולש DB'B עשוי להיתפס מתוך הסרטוט הדו-ממדי כשווה-שוקיים (DB = DB'), אף כי אין זו הדרך הרצויה להבנת הסרטוט. יתר על כן, המשולש DBB' לא נראה ישר-זווית בסרטוט, אף שזו כן הדרך הרצויה להבנת הסרטוט (∢DBB' = 90°).



איור 4: בהינתן כי ABCDA'B'C'D' קובייה, מהן תכונותיו של המשולש DBB'?

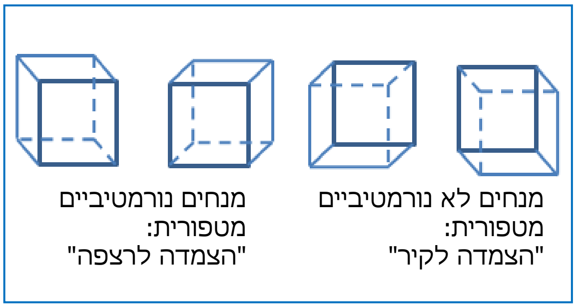
מידע תומך – Potentially Helpful Information (PHI)

בנוסף למידע המטעה, סרטוטים דו-ממדיים כוללים גם מידע חזותי התומך בהבנה, מעורר ויזואליזציה ומזמן חשיבה דדוקטיבית והסקה לוגית (Hadas, Hershkowitz & Schwarz, 2000). מידע תומך (**Potentially Helpful Information - PHI**) מורכב מאלמנטים גאומטריים אותם חולקים מבני העזר עם הקובייה. למשל, אם נחזור אל משולש DBB' באיור 5 נוכל לראות כי למשולש צלע משותפת עם הקובייה, ובו בזמן, שלושת הקדקודים שלו מהווים גם קדקודים של הקובייה. מידע ויזואלי זה, יחד עם ידע קודם לגבי תכונות הקובייה, עשוי לעזור ללומד להתמצא בסרטוט, להסיק כי משולש DBB' חייב להיתפס כישר-זווית (∢DBB' = 90°). ואינו יכול להיות שווה-שוקיים, גם אם שתי צלעות שלו נראות כשוות באורכן בסרטוט.

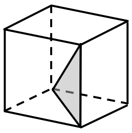
בטבלה 1 בהמשך, מוצגת ספירת מספר האלמנטים המטעים (#PMI) ומספר האלמנטים התומכים (#PHI) עבור הסרטוט שבאיור 4. במחקר זה אנו מציעים לבחון באיזו מידה משקפת האינטראקציה שבין מספר האלמנטים הגאומטריים המטעים (#PMI) ומספר האלמנטים הגאומטריים התומכים (#PHI), את הקושי החזותי הגלום בסרטוט. לצורך זה, חושב היחס **#PHI/#PMI** כמדד מתאים עבור הקושי החזותי. פירוט נוסף לגבי PMI ו- PHI ניתן למצוא בטבלה 2 בהמשך.

סרטוטים נורמטיביים ולא נורמטיביים

מעבר למידע הגאומטרי הגלום בסרטוט (PMI ו- PHI), **האוריינטציה של הסרטוט עשויה להוות אף היא מידע ויזואלי המשפיע על התפיסה החזותית (Larios, 2003). ספרי לימוד של גאומטריה במרחב נוטים** לסרטט צורות גאומטריות מרחביות באוריינטציה "נורמטיבית" מסוימת, המציגה קוביות **כמונחות בשניים מתוך ארבעה מנחים אפשריים (ראו איור 6)**. ייתכן כי הדבר מכוון, מתוך מחשבה כי דווקא השימוש באב-טיפוס מוכר עשוי לאפשר בהירות, הבנה וחשיבה (Solso & Raynis, 1979). יחד עם זאת, מגמה זו יכולה לעתים להוות קושי חזותי נוסף, ולעכב את זיהוי הצורה הגאומטרית, כאשר זו אינה עולה בקנה אחד עם האב-טיפוס המוכר (Maracci, 2001; Larios, 2003).



איור 5: האם מנח כלשהו של קובייה נראה לנו מוכר יותר?

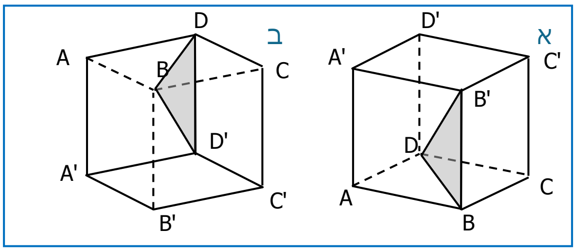
מידע נכון החבוי בסרטוט				מידע שגוי ששונה או נוסף לסרטוט					PMI הנגזר מזווית ההתבוננות בקובייה
מספר הקדקודים החבויים	מספר המקצועות החבויים	מספר המשטחים החבויים	מספר החיתוכים החבויים	מספר חיתוכי צלעות שאינם קיימים במציאות	מספר הצלעות הנראות לכאורה כמונחות על ישר אחד	מספר יחסי הצלעות שעברו שינוי	מספר זוויות שעברו שינוי	מקצועות על משטחים	
0	0	0	0	1	0	3	1	0	8
#PMI: 13									

קדקודים משותפים	מקצועות משותפים	אלכסוני פאות	מיקומים ידועים	מקצועות מאחורי משטחים
3	1	1	0	1
#PHI: 6				
#PHI/#PMI = 0.4602				

טבלה 1. חישוב היחס #PHI/#PMI עבור הסרטוט באיור 5.

בעקבות ממצאי מחקרים קודמים בגאומטריה במישור (Maracci, 2001; Larios, 2003; Solso & Raynis, 1988), אנו מצפים כי גם בהוראת הגאומטריה במרחב, השימוש התכוף בקוביות הממוקמות במנח נורמטיבי, ייצור אצל הלומדים דימוי טיפוסי פרוטוטיפי של קובייה. תלמידים המורגלים לקוביות המוצגות במנח נורמטיבי, עלולים להיווכח כי סרטוטים שאינם נורמטיביים הם פחות מוכרים ופחות מובנים. מתוך כך, סרטוטים לא נורמטיביים, המושגים בנקל על-ידי היפוך פשוט של הסרטוטים הנורמטיביים, יכולים להיות מאתגרים יותר מסרטוטים נורמטיביים, אף שבמהלך שינוי האוריינטציה, המידע הגאומטרי המטעה (#PMI) והמידע הגאומטרי התומך (#PHI), הגלומים בסרטוט, נותרו ללא שינוי (איור 6).

סרטוטים לא נורמטיביים, המושגים בנקל על-ידי היפוך פשוט של הסרטוטים הנורמטיביים, יכולים להיות מאתגרים יותר מסרטוטים נורמטיביים, אף שבמהלך שינוי האוריינטציה, המידע הגאומטרי המטעה (#PMI) והמידע הגאומטרי התומך (#PHI), הגלומים בסרטוט, נותרו ללא שינוי.



איור 6: בכוחו של היפוך אנכי להפוך סרטוט נורמטיבי ללא נורמטיבי

שאלות המחקר

אין ספק כי ויזואליזציה ותפיסה מרחבית קשורות בקשרי גומלין מורכבים בין היבטים רבים, אשר אולי לא ניתנים לפירוק למרכיבים בודדים. יחד עם זאת, לעתים גישה פשטנית, יש בכוחה לאפשר התבוננות והבנה. לפיכך, תוך מודעות לאפשרות שהמכלול עשוי להיות גדול מסכום חלקיו, חתרנו למציאת תשובות לשתי השאלות הבאות:

1. האם וכיצד קשרי הגומלין בין המידע התומך (PHI) והמידע המטעה (PMI) מבטאים את המכשולים החזותיים המקשים על הבנה נורמטיבית רצויה של סיטואציות גאומטריות במרחב, כשהן מוצגות באמצעות סרטוטים דו-ממדיים, אצל תלמידי תיכון?
2. האם יש בכוחן של חריגות מסרטוטים נורמטיביים של קובייה להשפיע על התפיסה המרחבית?

השערותינו היו:

1. ככל שהיחס #PHI/#PMI יקטן (מספר האלמנטים הגאומטריים המטעים יגדל, ומספר האלמנטים הגאומטריים התומכים יפחת), כן יגדל הקושי החזותי הטמון בסרטוט.
2. קיומה של תפיסה פרוטוטיפית המייצגת קובייה במרחב, תערים קשיים משמעותיים נוספים בפני התלמידים המתמודדים עם הבנת סרטוט לא נורמטיבי, בהשוואה לסרטוט התואם הנורמטיבי.

נעיר עוד כי היחס #PHI/#PMI נראה כהצעה הגיונית לנוסחה, שיש בכוחה ליצור קריטריון השוואתי לקושי החזותי הגלום בסרטוטים השונים, והוא מביא בחשבון כי תחת הטלה מקבילית, אשר אינה משמרת את היחס בין אורכי צלעות שאינן מקבילות, המכנה יהיה חיובי תמיד (#PMI > 0).

כלי המחקר ומהלך המחקר

פיתוח כלי המחקר

פיתוח כלי המחקר כלל שלבים אחדים:

א. על מנת לגלות אלו אלמנטים גאומטריים, הגלומים בסרטוטים דו-ממדיים של סיטואציות גאומטריות הקשורות בקוביות, המתפקדים כמטעים (PMI) או כתומכים (PHI), נעזרנו בשלוש מורות מנוסות למתמטיקה. המורות התבוננו בסרטוטים של קוביות עם מבני עזר, והצביעו על מרכיבים גאומטריים שונים, אשר לדעתן הטעו והקשו (PMI), או לחילופין, תמכו (PHI) בהבנת הסרטוטים. בטבלה 2 ניתן למצוא את ההגדרות והפירוט של מרכיבים גאומטריים אלו.

ב. על בסיס האלמנטים הגאומטריים, עליהם הצביעו שלוש המורות המנוסות בהוראת מתמטיקה בתיכון, פיתחנו ותיקפנו שיטה לספירת PMI ו- PHI. לאחר שהוגדרו המרכיבים השונים של PMI ו- PHI בסרטוטים של קוביות עם מבני עזר, בהן סומנו המקצועות האחוריים באמצעות קווים מרוסקים, הושגה שיטת ספירה חד-משמעית. שיטת הספירה תוקפה עבור 110 סרטוטים של קוביות עם מבני עזר, בקרב קבוצה של 20 מורי מתמטיקה מנוסים בתיכון. הספירה הייתה כמעט זהה (93%) (הספירה הייתה אחידה עבור 102 מן הסרטוטים), עם מקדם kappa המצביע על מהימנות הולמת בין השופטים (k = 758).

ג. בנינו מבחן לדירוג הקושי החזותי של סרטוטים דו-ממדיים (Problem Difficulty Rating Test - PDRT). מבחן זה נבנה במיוחד על מנת לאפשר השוואה בין הקושי החזותי התאורטי, הנקבע על-פי היחס #PHI/#PMI, והאוריינטציה של הסרטוטים, לבין הקושי החזותי בפועל, המשתקף בציונים עבור הבנת סרטוטים אלו. התמקדנו ב- 102 הסרטוטים הנורמטיביים הראשוניים, עבורם הייתה הסכמה מלאה בין הסופרים. הסרטוטים מוינו על-פי יחס #PHI/#PMI יורד (קושי חזותי עולה), וחולקו לשש קבוצות נפרדות, של 17 פריטים כל אחת. בכל אחת משש הקבוצות חושב היחס #PHI/#PMI הממוצע, ושני סרטוטים, עבורם היה היחס #PHI/#PMI קרוב לממוצע, נבחרו לייצג את הקבוצה ולהיכלל במבחן PDRT. באופן זה קיבלנו 12 סרטוטים ראשוניים, מתוכם חיברנו 12 פריטים נורמטיביים עבור מבחן PDRT.

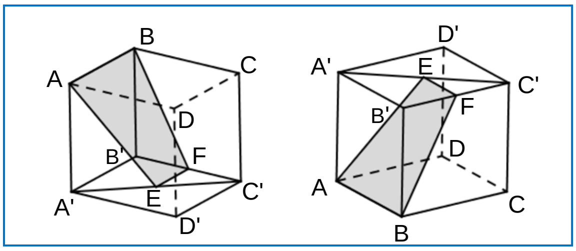
ד. מתוך 12 הפריטים הנורמטיביים יצרנו, באמצעות היפוך אנכי של הסרטוטים, 12 פריטים לא נורמטיביים. 24 הפריטים שולבו במבחן PDRT באופן רנדומלי. המבחן חולק לשני חלקים כדי למנוע מהנבדקים השוואה בין פריטים תואמים. בטבלה 3 ניתן לראות כיצד חושב היחס #PHI/#PMI עבור שני פריטי המבחן התואמים המוצגים באיור 7. כיוון ששני הפריטים נוצרו באמצעות היפוך אנכי, יש להם בדיוק אותם אלמנטים תומכים (PHI) ואותם אלמנטים מטעים (PMI).

סוג המידע	קוד	**הגדרה**	דוגמה
מידע תומך (PHI) Potentially Helpful Information	PHI 1	**מיקום נתון של קדקוד** - מיקום נתון מראש של קדקודי הצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, על גבי מקצועות הקובייה, או על גבי אלכסוני פאות הקובייה, כאשר הם אינם מתלכדים עם קדקודי הקובייה.	קדקוד E באיור 7, לגביו נתון כי הוא ממוקם באמצע הקטע A'C'.
	PHI 2	**קדקודים המתלכדים עם קדקודי הקובייה** - קדקודי הצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, הנמצאים באותה נקודה בה נמצאים קדקודי הקובייה.	קדקוד B באיור 4 משותף למשולש BB'D **ולקובייה.**
	PHI 3	**צלעות המתלכדות עם מקצועות הקובייה** - צלעות הצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, המונחות במלואן על מקצועות הקובייה וזהות להן באורכן.	הצלע BB' באיור 4.
	PHI 4	**צלעות המתלכדות עם אלכסוני פאות הקובייה -** צלעות הצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, המהוות אלכסונים של פאות הקובייה.	הצלע BD באיור 4.
	PHI 5	**ישרים מאחורי המשטח -** ישרים מקווקווים אשר לכאורה חותכים את המשטח מאחוריו, ותומכים בהתמצאות המרחבית.	הצלע המקווקוות DC באיור 4.
מידע מטעה (PMI) Potentially Misleading Information — הסתרה של אלמנטים קיימים	PMI 1	**קדקודים מוסתרים -** קדקוד המוסתר ע"י נקודה או ישר המונחים מעליו. מדובר בקדקודים השייכים לצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, או לקובייה עצמה, אשר מוסתרים בסרטוט על-ידי נקודות או ישרים המונחים מעליהם.	הקדקוד הנסתר באיור 1.
	PMI 2	**צלעות מוסתרות -** צלע המוסתרת, באופן מלא או חלקי, ע"י ישר המונח מעליה. צלע של הצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, או מקצוע הקובייה עצמה, אשר מוסתרת כולה או חלקה על-ידי ישר אחר המונח ממש מעליה.	באיורים שהוצגו אין אלמנטים כאלה. דוגמה קיצונית לצורה עם אלמנטים מוסתרים היא קובייה המסורטטת כריבוע, במבט מלפנים, ולכן רוב האלמנטים שלה מוסתרים. ☐
	PMI 3	**משטח מוסתר** – משטח של הצורה הגאומטרית שנוספה, המוסתר כולו או חלקו.	
	PMI 4	**הצטלבויות מוסתרות של שני ישרים -** הצטלבות עם צלע הנסתרת באזור החיתוך תוגדר כנסתרת.	
הוספה לכאורה של אלמנטים שאינם קיימים במציאות	PMI 5	**הצטלבויות ישרים שנוספו לכאורה** - חיתוך קטעים אשר לכאורה נוסף לסרטוט, ולא קיים במציאות. אין לספור מקרים שכבר נספרו במסגרת חישוב PMI בקובייה.	ההצטלבות בין הישר BB' והישר DC, אשר מופיעה באיור 4, אולם אינה קיימת במציאות.
	PMI 6	**קטעים הנראים לכאורה כמונחים על גבי אותו הישר** - שתי צלעות אשר נראות לעין (גם אם צלע נראית חלקית אך לא אם הצלע נסתרת באופן מלא), כמונחות על גבי אותו ישר, בין אם יש לצלעות נקודות משותפות ובין אם לא.	אלומת הישרים באיור 1.
	PMI 7	**יחס אורכי קטעים אשר לכאורה השתנה -** הכוונה ליחס בגודל הצלעות של הצורה הגאומטרית החסומה בקובייה, כפי שזה נראה לעין במונחים של קטן, גדול או שווה (לא יחס מספרי מדוד).	הצלעות DB ו- DB' שנראות שוות באיור 4.
	PMI 8	**זוויות שגודלן לכאורה השתנה** - זוויות הצורה הגאומטרית החסומה בתוך הקובייה, אשר גודלן השתנה במונחים של חדות / ישרות / קהות, על-פי הנראה לעין.	הזווית ∢DBB' שאינה נראית ישרה באיור 4.
	PMI 9	**ישרים מלפני המשטח -** ישרים רציפים אשר לכאורה חותכים את המשטח מעליו, ומפריעים להתמצאות המרחבית.	הישר BB' באיור 4.

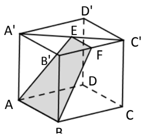
טבלה 2. אלמנטים גאומטריים המתפקדים כ- PHI או PMI בסרטוט דו-ממדי נורמטיבי של קובייה

איור 8א מציג דוגמאה לפריט מתוך המבחן לדירוג הקושי החזותי של סרטוטים דו-ממדיים (PDRT). הפריט נבנה על בסיס הקובייה בעלת האוריינטציה הנורמטיבית באיור 7. בהינתן נקודות האמצע של אלכסון וצלע הבסיס העליון של הקובייה ABCDA′B′C′D′, שאלנו לגבי תכונות המרובע ABFE.

איור 8ב מציג את הפריט התואם המתייחס לקובייה הלא נורמטיבית שבאיור 7, והמכיל בדיוק את אותן השאלות.



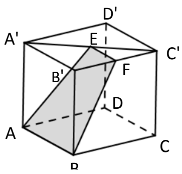
איור 7: שני סרטוטים תואמים במבחן PDRT

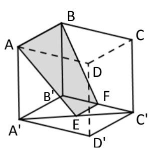
מידע נכון החבוי בסרטוט				מידע שגוי ששונה או נוסף לסרטוט					PMI הנגזר מזווית ההתבוננות בקובייה
מספר הקדקודים החבויים	מספר המקצועות החבויים	מספר המשטחים החבויים	מספר החיתוכים החבויים	מספר חיתוכי צלעות שאינם קיימים במציאות	מספר הצלעות הנראות לכאורה כמונחות על ישר אחד	מספר יחסי הצלעות שעברו שינוי	מספר זוויות שעברו שינוי	מקצועות מעל משטחים	
0	0	0	0	7	0	1	3	2	8
#PMI: 21									

קדקודים משותפים	מקצועות משותפים	אלכסוני פאות	מיקומים ידועים	מקצועות מאחורי משטחים
2	2	1	0	1
#PHI: 6				

#PHI/#PMI = 0.286

טבלה 3. חישוב היחס #PHI/#PMI עבור שני הסרטוטים התואמים באיור 7

פריט בנוסח א (מצג נורמטיבי)	נתוני השאלה		היגד	נכון/לא נכון	
	ABCDA'B'C'D' מייצגת קובייה. נתון כי הנקודה E היא אמצע A'C', והנקודה F היא אמצע B'C'.	א	הישר AE עובר דרך הנקודה B'.	☐ נכון ☐ לא נכון	
		ב	המרובע ABFE טרפז שווה-שוקיים. הצלעות השוות הן ____________	☐ נכון ☐ לא נכון	
		ג	המרובע ABFE טרפז ישר-זווית. הזוויות השוות הן ____________	☐ נכון ☐ לא נכון	
		ד	AE היא הצלע הארוכה ביותר במרובע ABFE.	☐ נכון ☐ לא נכון	

פריט בנוסח ב (מצג לא-נורמטיבי)	נתוני השאלה		היגד	נכון/לא נכון	
	ABCDA'B'C'D' מייצגת קובייה. נתון כי הנקודה E היא אמצע A'C' והנקודה F היא אמצע B'C'.	א	הישר AE עובר דרך הנקודה B'.	☐ נכון ☐ לא נכון	
		ב	המרובע ABFE טרפז שווה-שוקיים. הצלעות השוות הן ____________	☐ נכון ☐ לא נכון	
		ג	המרובע ABFE טרפז ישר-זווית. הזוויות השוות הן ____________	☐ נכון ☐ לא נכון	
		ד	AE היא הצלע הארוכה ביותר במרובע ABFE.	☐ נכון ☐ לא נכון	

איור 8: שני פריטי שאלון שההבדל היחידי ביניהם הוא המצג של האיור

אוכלוסיית המחקר

על מנת להתמקד בקשיים ויזואליים הנובעים ממידע חזותי הטמון בסרטוטים, ביקשנו להתמקד בתלמידי תיכון בעלי ידע גאומטרי מיטבי, הן במישור והן במרחב. מתוך כך, כללה האוכלוסייה 180 תלמידי תיכון בכיתה י"ב, הלומדים מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל. כמו כן, רצינו להתמקד בתלמידים בעלי תפיסה נורמטיבית של קוביות. על מנת לחשוף את התפיסה הקיימת, ביקשנו מן הנבדקים לסרטט קובייה, תוך שימוש בקווים מקוטעים עבור מקצועותיה האחוריים. מאחר ואנשים נוטים לסרטט סקיצות בהתאם לייצוגים מנטאליים זכורים, הנבנים מתוך דפוסים בהם נתקלו לעתים קרובות במהלך הלמידה (Solso & Raynis, 1979; Larios, 2003), ציפינו לחשוף קיומו של פרוטוטיפ עבור קובייה, התואם את האוריינטציה הנורמטיבית בהוראת הגאומטריה במרחב. על מנת למנוע הטיה במחקר, הוצאנו מחישובינו הסטטיסטיים 6 תלמידים אשר סרטטו קוביות לא נורמטיביות, כך שבסיכומו של דבר מנתה אוכלוסיית המחקר 174 תלמידים.

מהלך המחקר

מבחן PDRT הועבר ל- 174 תלמידי תיכון, בעלי תפיסה נורמטיבית של קובייה, הלומדים כולם מתמטיקה ברמה של 5 יח"ל בכיתה י"ב, ואמורים לפיכך להכיר היטב קוביות ומבני עזר המוכלים בהם. שלושה ציונים חושבו עבור כל נבדק: ציון ממוצע ב- 12 הפריטים הנורמטיביים, ציון ממוצע ב- 12 הפריטים הלא נורמטיביים, וציון ממוצע כללי, עבור כל 24 הפריטים. נערכה השוואה בין הקושי החזותי התאורטי של 24 הפריטים, אשר נקבע על-פי היחס #PHI/#PMI, לבין הקושי החזותי בפועל, כפי שהוא בא לידי ביטוי בציוני PDRT אותם קיבלו 174 הנבדקים עבור הבנת פריטי המבחן. לצורך השוואה זו בוצעו ניתוחי שונות וקורלציות.

ממצאים

טבלה 4 מציגה סיכום של ממצאי המחקר.

אשר לשאלת המחקר הראשונה, הממצאים מראים מתאם גבוה מובהק בין היחס #PHI/#PMI ובין הציונים שקיבלו הנבדקים במבחן PDRT, הן עבור הסרטוטים הנורמטיביים, הן עבור הסרטוטים הלא נורמטיביים, והן עבור כלל הסרטוטים. קורלציות אלו תומכות בהשערה כי האינטראקציה שבין PHI ו- PMI אחראית לחלק ניכר מן הקושי החזותי התפיסתי בגאומטריה מרחבית אצל תלמידי תיכון. לא רק עבור לומדים הניצבים מול סרטוטים נורמטיביים, אלא גם עבור לומדים הניצבים מול סרטוטים לא נורמטיביים. בשני המקרים, תומכים ממצאים אלו בהשערה שלנו כי הקושי החזותי של הסרטוט גדל ככל שמוצגים בסרטוט יותר אלמנטים גאומטריים מטעים, ופחות אלמנטים גאומטריים תומכים, כלומר, ככל ש- #PHI קטן ו- #PMI גדל.

	סרטוטים נורמטיביים	סרטוטים לא נורמטיביים	כלל הסרטוטים
תוצאות מבחן PDRT	M = 83.548 SE = .927	M = 80.477 SE = .850	
מתאם (Pearson)	r = .703 p < .0001	r = .543 p < .0001	r = .612 p < .0001

טבלה 4: מתאמי Pearson בין ציוני מבחן PDRT לבין היחס #PHI/#PMI

בהתייחס לשאלת המחקר השנייה, כפי שציפינו, אכן מצאנו כי השימוש הנפוץ במנח הנורמטיבי יצר אצל רוב רובם של הלומדים דימוי מנטאלי נורמטיבי פרוטוטיפי עבור קוביות. 97% של הנבדקים (174 מתוך 180) סרטטו קובייה הזהה לייצוג הנורמטיבי של קובייה בספרי הלימוד (3% הנותרים לא הובאו בחשבון בניתוח הסטטיסטי שלנו). בנוסף, ניתוח השונות מצביע על הבדל מובהק בין ציוני מבחן PDRT בפריטים הנורמטיביים (M = 83.548, SE = .927) לבין ציוני מבחן PDRT בפריטים הלא נורמטיביים (M = 80.477, SE = .850), F (1,171) = 32.831, p < .001, כאשר ציוני מבחן PDRT בפריטים הלא נורמטיביים נמוכים באופן מובהק מציוני מבחן PDRT בפריטים הנורמטיביים.

גם תוצאות מבחן Fisher (ראו טבלה 4), המצביעות על הבדל מובהק בין המתאמים המחושבים של היחס #PHI/#PMI ושל ציוני PDRT בסרטוטים הנורמטיביים והלא נורמטיביים, תומכים בציפייה ההתחלתית שלנו כי

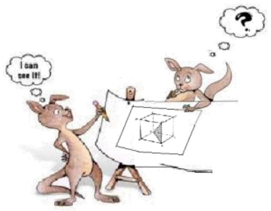
סרטוטים דו-ממדיים לא נורמטיביים, אשר אינם תואמים לאב-טיפוס הנפוץ, יוצרים הבדל מובהק בקושי התפיסתי.

דיון ומסקנות

על-פי ממצאי המחקר, היחס #PHI/#PMI מסביר חלק ניכר של הקושי החזותי אצל תלמידי תיכון המנסים להבין סרטוטים דו-ממדיים של קוביות עם מבני עזר. ממצא חדשני זה חושף את קיומו של דפוס מנטאלי לא מודע, הנשלט על-ידי גירויים חזותיים חיצוניים, ומציב אתגרים ויזואליים בפני התפיסה המרחבית, הן הנורמטיבית והן הלא נורמטיבית, וזאת מעבר למאפיינים האישיים של הלומד. חשיפה זו מגלה כיוון חדש למחקר עתידי לגבי גופים נוספים במרחב. על אף הנחיצות של מחקר בכיוון זה, הוראת הגאומטריה במרחב יכולה להקדים לעשות שימוש מועיל ביחס #PHI/#PMI כמנבא קושי חזותי, ולהתאים סרטוטים שונים למטרות חינוכיות שונות: הקטנת #PMI והגדלת #PHI בסרטוט עשויות לסייע ללומדים להבין את הסיטואציה הגאומטרית התלת-ממדית ולקדם ויזואליזציה, בעוד שהגדלת #PMI והקטנת #PHI עשויות לשמש למטרות פדגוגיות אחרות, כגון, בדיקת יכולת מרחבית של תלמידים, או הכשרת לומדים להתמודדות עם קושי חזותי רב. בנוסף, ממצאי מחקרים קודמים מצביעים בבירור על התועלת שיש בשימוש בטכנולוגיה, לקידום ההבנה של מבנים תלת-ממדיים (Widder & Gorsky, 2012; Tuvi-Arad & Gorsky, 2007; Feng, Spence & Pratt, 2007).

מכל מקום, היחס #PHI/#PMI משמש כמנבא טוב יותר עבור סרטוטים נורמטיביים מאשר עבור סרטוטים לא-נורמטיביים. הדבר מצביע על מעורבותו של גורם נוסף, המשבש את הראייה המרחבית בסרטוטים לא נורמטיביים. הממצאים שלנו מאשרים את קיומו של אב-טיפוס המייצג קובייה: רובם המכריע של הנבדקים סרטטו את אותה קובייה נורמטיבית, בה פגשו לעתים קרובות במהלך לימוד הגאומטריה במרחב. מצד אחד, השימוש התכוף בסרטוטים נורמטיביים מוכרים של קוביות בהוראת גאומטריה מרחבית עשוי לסייע לוויזואליזציה (Solso & Raynis, 1979). מצד שני, קיומו של פרוטוטיפ עלול לפגוע בגמישות החשיבה, ולעכב זיהוי ומניפולציה מנטאלית של מצב גאומטרי תלת-ממדי המתואר בסרטוט לא נורמטיבי (Larios, 2003).

מתוך כך עולות שאלות חשובות כגון: מהו האופן בו משפיעים פרוטוטיפים על התפיסה המרחבית שלנו? האם יהיה זה מתאים להעשיר את קבוצת הפרוטוטיפים המשמשים להוראת גאומטריה במרחב? מחקר עתידי יוכל לספק מענה לשאלות אלו ואחרות, אולם, חשוב לשים לב כבר כעת לאוריינטציה של הסרטוטים הדו-ממדיים בהוראת גאומטריה במרחב, שכן לדבר זה יש משמעות פדגוגית-דידקטית מיידית בכיתה: שני תלמידים המתבוננים



בסרטוט מכיוונים מנוגדים עלולים להיתקל בקשיים חזותיים שונים זה מזה, משום שאחד מהם צופה בסרטוט מוכר, נורמטיבי, ואילו השני מתמודד עם סרטוט מוזר, לא נורמטיבי (איור 6). השלכה זו עשויה לעניין לא רק את העוסקים בתחום החינוך המתמטי, אלא מעבר לכך: לדוגמה, נסו לדמיין שני רופאים, היושבים משני צדדים מנוגדים של המטופל, בעודם מתבוננים בצילום רנטגן, או במסך הלפרוסקופ במהלך ניתוח ...

על-פי ממצאי המחקר, היחס בין מספר פרטי המידע התומך לבין מספר פריטי המידע המטעה (#PHI/#PMI) מסביר חלק ניכר של הקושי החזותי אצל תלמידי תיכון המנסים להבין סרטוטים דו-ממדיים של קוביות עם מבני עזר. ממצא חדשני זה חושף את קיומו של דפוס מנטאלי לא מודע, הנשלט על-ידי גירויים חזותיים חיצוניים, ומציב אתגרים ויזואליים בפני התפיסה המרחבית.

מקורות

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 215-241.

Bakó, M. (2003). Different projecting methods in teaching spatial geometry. *Electronic Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* http://www.erme.tu-dortmund.de/~erme/CERME3/Groups/TG7/TG7_Bako_cerme3.pdf

Christou, C., Pittalis, M., Mousoulides, N. & Jones, K. (2005). Developing 3D dynamic geometry software: Theoretical perspectives on design. In F. Olivero & R. Sutherland, (Eds.), *Visions of mathematics education: Embedding technology in learning* (pp. 69-77). Bristol, UK: University of Bristol.

Ferrara, F. & Mammana, M. F. (2014). Seeing in Space is Difficult: an Approach to 3D Geometry through DGE. *Proceedings of PME 38 / PME-NA 36 Conference: Mathematics Education at the Edge*. Vancouver, Canada. Jul 15-20, 2014.

Feng, J., Spence, I., & Pratt, J. (2007). Playing an action video game reduces gender differences in spatial cognition. *Psychological Science*, *18*(10), 850-855.

Gutiérrez, A. (1996). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig, & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 1 (pp. 3-19). Valencia: Universidad de Valencia.

Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics*, *44*, 127-150.

Kali, Y., & Orion, N. (1996). Spatial abilities of high-school students in the perception of geologic structures. *Journal of Research in Science Teaching*, *33,* 369-391.

Kirby, R. M. (2008). The need for verifiable visualization. *IEEE Computer Graphics & Applications*, *28*(5), 78-83.

Larios, O. V. (2003). Geometrical Rigidity: An Obstacle in Using Dynamic Geometry Software in a Geometry Course. *Electronic Proceedings of the 3rd Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*. http://fractus.uson.mx/Papers/CERME/TG7_LariosOsario_draft.pdf

Maracci, M. (2001). The formulation of a conjecture: the role of drawings. In Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education,* 3 (pp. 335-342). Holland: Utrecht University.

Parzysz, B. (1988). 'Knowing' vs. 'seeing': Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, *19*, 79-92.

Solso, R. L., & Raynis, S. A. (1979). Prototype formation of imaged, kinesthetically and visually presented geometric forms. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception & Performance*, *5*, 701-712.

Tuvi-Arad, I., & Gorsky, P. (2007). New visualization tools for learning molecular symmetry: A preliminary evaluation. *Chemistry Education Research and Practice*, *8* (1), 61-72.

Widder, M. & Gorsky, P. (2012). How students solve problems in spatial geometry while using a software application for visualizing 3D geometric objects. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *32*(1), 557-588.

Widder, M., Berman, A. & Koichu, B. (2014). Dismantling Visual Obstacles to Comprehension of 2-D Sketches Depicting 3-D Objects. *Proceedings of PME 38 / PME-NA 36 Conference: Mathematics Education at the Edge*. Vancouver, Canada. Jul 15-20, 2014.

מירלה וידר

דוקטורנטית בפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, הטכניון.

מורה בתיכון "אביב" רעננה.

מדריכת מורים למתמטיקה.

פרופ' אבי ברמן

הפקולטה למתמטיקה, הטכניון

פרופ"מ בוריס קויצ'ן

הפקולטה לחינוך למדע וטכנולוגיה, הטכניון