

# בעיה בגיאומטריה עם פתרונות שונים

אלון פינטו

מילות מפתח: ריבוי פתרונות, גיאומטריה מישור, טריגונומטריה, גיאומטריה אנליטית, וקטורים, מספרים מרוכבים, פתרונות ללא מילים, אסתטיקה מתמטית

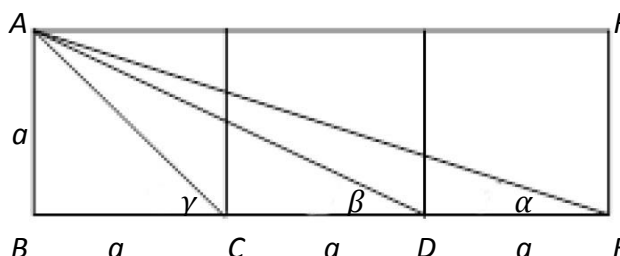
תוכן עניינים

|   |                                   |
|---|-----------------------------------|
| 2 | נוסח הבעיה                        |
| 2 | מקור                              |
| 2 | מדוע הבעיה יפה בעיני              |
| 3 | פתרון 1 – גיאומטריה מישור         |
| 3 | פתרון 2 – טריגונומטריה            |
| 3 | פתרון 3 – גיאומטריה אנליטית       |
| 3 | פתרון 4 – מספרים מרוכבים          |
| 4 | פתרונות 5 ו-6 – פתרונות ללא מילים |

## נוסח הבעיה

מלבן בציור מורכב משלושה ריבועים זהים. הוכיחו כי:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$$



## מקור

(סמן/י את האפשרויות המתאימות)

| פירוט     |                                                       |
|-----------|-------------------------------------------------------|
|           | פיתוח עצמי                                            |
|           | עמית/ה                                                |
| ספר לימוד | ספר הנדסה של בני גורן, חלק ב', עמ' 121 תרגיל מספר 15. |
|           | השתלמות מורים או כנס                                  |
|           | לא זוכר/ת                                             |

## מדוע הבעיה יפה בעיני

בעיני, היופי בבעיה הזו הוא שניתן לפתור אותה בעזרת כלים מתחומים מתמטיים שונים: גיאומטריה מישור, טריגונומטריה, מספרים מרוכבים, הנדסה אנליטית, וקטורים ועוד. ניתן לנצל את הפתרונות השונים על מנת להאיר היבטים חבויים של הבעיה, גם אחרי שלכאורה נפתרה, וכן על מנת ליצור קשרים בין נושאים שונים מתכנית הלימודים. לדוגמא, אפשר להשוות בין הנוסחאות המוכרות מטריגונומטריה, גיאומטריה אנליטית, וקטורים, ומספרים מרוכבים, ולשאול מה אנחנו מרוויחים (או מפסידים) מלהתבונן על בעיות דרך עדשה מתמטית מסוימת. פתרונות בלי מילים מציבות אתגר פחות מוכר לתלמידים – לפרש ולאמת הוכחה. בכיתה, ניתן להציג את הפתרונות ללא מילים לתלמידים, ולבקש מהם "להשלים" את כל אחד מהפתרונות במילים שלהם. אפשר גם להעלות לדיון את השאלה האם פתרון ללא מילים מהווה "הוכחה מתמטית", ובאופן כללי יותר, מה אנחנו מצפים מהסבר מתמטי על מנת שנראה אותו כשלם ומשכנע. ניתן למנף את ריבוי הפתרונות לדיון על אסתטיקה במתמטיקה – מה עושה פתרון מסוים ליפה יותר, או טוב יותר, מפתרון אחר? לדוגמא, יתרון של הפתרון ללא מילים הוא שכמעט לא נדרש חישובים על מנת להשתכנע בנכונותו, וכן שהוא ממחיש ויזואלית (ולא רק אלגברית) מדוע  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ . הובלתי מספר דיונים כאלה עם מורים בעבר, והתרשמתי מהאופן בו השוואה בין פתרונות שונים עוזרת לשנות את השיח על המהות של פתרון בעיות מ- "להשיג תשובה ולעבור הלאה" ל- "לחקור את הסיטואציה ולנסות ללמוד משהו חדש". בנוסף, גיליתי שלא משנה כמה פעמים כבר דנתי בבעיה, ההשוואה בין פתרונות שונים תמיד מאירה פנים חדשות שלה שלא הכרתי. לדוגמא, מפתרון 1 ניתן ללמוד שהיחס בין AE ל-AD הוא  $\sqrt{2}$ , ולכן שניתן לייצג את AE כאלכסון של ריבוע עם צלע באורך AD, כפי שניתן לראות ויזואלית בפתרון ללא מילים השמאלי. הפתרון ללא מילים הימני ממחיש באופן ויזואלי את השוויון הטריגונומטרי שהוכח אלגברית בפתרון 2:

$$\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

### פתרון 1 – גיאומטריה מישור

נשים לב ש-ABC הוא משולש ישר זווית ושווה שוקיים ולכן  $\angle CAB = \gamma = \frac{\pi}{4}$ . מאחר  $\angle DAF$  ו- $\beta$  הן זוויות מתחלפות, מספיק להראות ש  $\angle CAD = \alpha$ , כיוון שאז ינבע ש  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ .  
לפי משפט פיתגורס:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a$$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \frac{CE}{AC} \quad \text{לכן:}$$

ומאחר ש-  $\angle ACD = \angle ECA$ , המשולשים  $ACD$  ו-  $ECA$  דומים ו-  $\angle CAD = \angle CEA = \alpha$

### פתרון 2 – טריגונומטריה

נשים לב ש-  $\alpha = \arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ ,  $\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ ,  $\gamma = \arctan\left(\frac{1}{1}\right)$ .

כלומר, צריך להוכיח ש-  $\arctan\left(\frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{2}$

נציב בנוסחת הסכום לטנגנס  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$  ונקבל  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{6}} = 1$ .

לכן  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ , וסיימנו.

### פתרון 3 – גיאומטריה אנליטית

נייצג את הסכום  $\alpha + \beta$  כזוויות בין הישרים  $y = \frac{x}{2}$  ו-  $y = -\frac{x}{3}$ .

נשים לב ש-  $\alpha$  היא בהכרח קטנה מ-  $\frac{\pi}{4}$  וכי  $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$ . לכן ניתן להפעיל את הנוסחה לזוויות בין ישרים ונובע ש-

$$\tan(\alpha + \beta) = \left| \frac{\frac{1}{2} - (-\frac{1}{3})}{1 + (-\frac{1}{6})} \right| = 1$$

### פתרון 4 – מספרים מרוכבים

נגדיר

$$Z = 2a + ia = \sqrt{5}e^{i\alpha}$$

$$W = 3a - ia = \sqrt{10}e^{-i\beta}$$

אז

$$\alpha + \beta = \arg(ZW^{-1}) = \arg\left(\frac{Z\bar{W}}{|W|}\right)$$

$$\frac{Z\bar{W}}{|W|} = \frac{1}{\sqrt{10}}(2a + ia)(3a + ia) = \frac{1}{\sqrt{10}}(5a^2 + i5a^2)$$

$$\alpha + \beta = \arg(5a^2 + i5a^2) = \arctan\left(\frac{5}{5}\right) = \frac{\pi}{4}$$

פתרונות 5 ו-6 – פתרונות ללא מילים

