

בעיה אהובה של ויקטוריה

נוסח הבעיה

לפי מערכת משוואות לחשב את סכום: $xy+2yz+3zx$

פתרון

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 16 \\ z^2 + zx + x^2 = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = (x)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2x \frac{y}{\sqrt{3}} \cos 150^\circ \qquad (\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2})$$

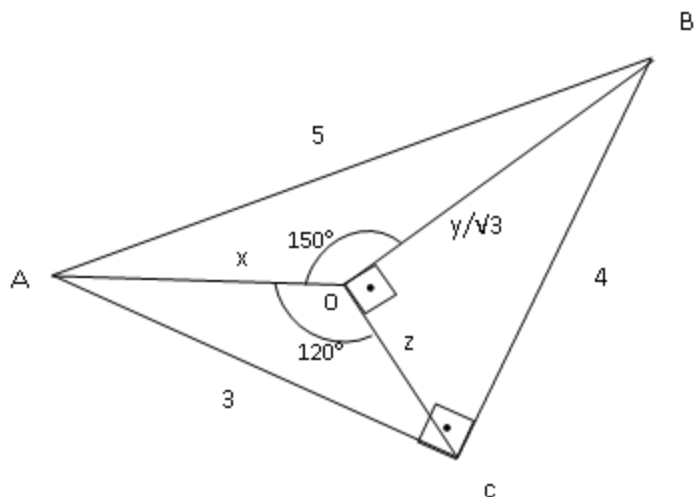
$$(x, \frac{y}{\sqrt{3}}, 150^\circ)$$

$$x^2 + zx + z^2 = (x)^2 + (z)^2 - 2xz \cos 120^\circ \qquad (\cos 120^\circ = -\frac{1}{2})$$

$$(x, z, 120^\circ)$$

$$\frac{y^2}{3} + z^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + z^2 - 2 \frac{y}{\sqrt{3}} z \cos 90^\circ \qquad (\cos 90^\circ = 0)$$

$$(\frac{y}{\sqrt{3}}, z, 90^\circ)$$



$$AO = x$$

$$CO = z$$

$$BO = \frac{y}{\sqrt{3}}$$

$$S_{AOB} = \frac{xy}{2\sqrt{3}} \sin 150^\circ = \frac{xy}{4\sqrt{3}}$$

$$(\sin 150^\circ = \frac{1}{2})$$

$$S_{BOC} = \frac{yz}{2\sqrt{3}}$$

$$(\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$S_{AOC} = \frac{xz}{2} \sin 120^\circ = \frac{xz\sqrt{3}}{4}$$

$$(\sin 90^\circ = 1)$$

$$S_{ABC} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$6 = \frac{xy}{4\sqrt{3}} + \frac{yz}{2\sqrt{3}} + \frac{xz\sqrt{3}}{4} \quad / \cdot 4\sqrt{3}$$

$$\underline{24\sqrt{3} = xy + 2yz + 3zx} \quad \text{תשובה:}$$

למה הבעיה היא יפה בעיניי?

פתרון בלתי צפוי, שימוש לא שגרתי בטריגו ובגיאומטריה