

מינימום משקולות למקסימום טווח

יחיאל קמחי

מילות מפתח: אופטימיזציה, שיטות ספירה

תוכן עניינים

2 נוסח הבעיה

2 מקור

2 רמז

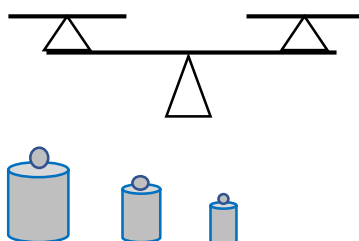
2 מדוע הבעיה יפה בעיני

3 פתרון

3 תובנות משימוש בבעיה בכיתה ו/או המלצות למורים המבקשים להשתמש בבעיה:

נוסח הבעיה

מהו המספר המזערי של משקולות הדרוש למוכר בשוק כדי לשקול במאזניים (כמו של אלת הצדק) כל משקל בקילוגרמים שלמים מ 1Kg ועד 40Kg ?



מקור

פירוט	
הרחבתי את הפתרון ואת משמעותו, לאחר לימודים אקדמיים	פיתוח עצמי
פועל, אספן חידות, שעבד ליד ביתי כשהייתי בן 10	עמית/ה
	ספר לימוד
	השתלמות מורים או כנס
	לא זוכר/ת

רמז

אפשר לחפש באלגוריתם חמדן (Greedy algorithm). זה עובד, למרות שאינו מסביר.

מדוע הבעיה יפה בעיני

הבעיה ניתנת לפתרון ע"י ניסוי ותעייה פשוטים יחסית, אפילו בגיל בי"ס יסודי. הפתרון מאפשר פרשנות נרחבת לכל מיני תחומים הרבה מעבר למנוסח בחידה, למשל, כפי שנרמז במילות המפתח, לכיוון שיטות ספירה לפי בסיסים, כולל הרחבה מאד לא שמרנית, כפי שאסביר לאחר הצגת הפתרון.

פתרון

פתרון ללא הסבר וללא מוטיבציה: ארבע משקולות בערכים 1, 3, 9, 27.

למשל: 17 מקבלים ע"י 27 בכף אחת של המאזניים ו-9, 1 בכף השנייה:

$$27 - (9 + 1) = 17$$

תובנות משימוש בבעיה בכיתה ו/או המלצות למורים המבקשים להשתמש בבעיה:

דרך פתרון (חמדן) ע"י ניסוי ותעייה: נניח שאנו חייבים משקולת של 1ק"ג (לא מוכרחים), אז לא כדאי לבחור משקולת של 2ק"ג (כי נקבל ערך 1 בשני אופנים: 1 ישירות וגם $2 - 1$) ולכן צריך משקולת של 3ק"ג. כעת אנו יכולים לקבל את כל הערכים 1, $3 - 1$, 3, $3 + 1$.

השלב החמדן הבא הוא לבחור משקולת של 9ק"ג מפני ש $5 = (3 + 1) - 9$. וכן הלאה.

אפשר להוכיח באינדוקציה כי ערכי המשקולות צריכים להיות חזקות של 3: נניח שיש לנו פתרון מזערי של k משקולות (דוגמה עבור $3 = 1, 3, 9$: אלשקילת הערכים $1 \dots 13$). אז הכפלת כל משקולת פי 3 תיתן לנו קבוצת משקולות מזערית עבור משקלים שהם כפולות של 3: מ-3 ועד $39 = 3(1+3+9)$. אהוספת המשקולת של 1ק"ג תאפשר לסגור את הפערים בקפיצות ה-3 ע"י $+1$ או -1 , וגם תשלים את החסר עבור 1ק"ג.

הרחבה קלה: אפשר "לשפר" את הפתרון ע"י החלפת המשקולת של 1ק"ג במשקולת של 2ק"ג: מעכשיו מקבלים את 1 ע"י $3 - 2$, אבל סכום המשקולות הוא 41ק"ג ($13 = (9+3+2) - 27$). ניסיון להרחיב עוד ע"י החלפת 3ק"ג ב 6ק"ג נראה בתחילה מבטיח, אבל נכשל ביצירת 37ק"ג.

הסתכלות מעניינת נוספת, מנקודת המבט של ייצוג מספרים על-פי בסיסים, היא האבחנה שזו דוגמה לשימוש בספרות שליליות: במקום הספרה 2 (בייצוג על בסיס 3), משתמשים בספרה $[-1]$ (עם ספרה חיובית גדולה יותר): לדוגמה, המספרים $1 - 9$ בבסיס 3 נכתבים: 1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100. בשימוש בספרה $[-1]$ במקום השימוש בספרה 2, הם יכתבו: $[1]$, $[-1][1]$, $[0][1]$, $[-1][1][1]$, $[0][1][1]$, $[-1][1][1]$, $[1][1][1]$.

(כל ספרה נכתבה בתוך סוגרים []) כדי להבחין בקלות מי מקבל את המינוס ב- $(1-11)$. כתיבה כזו יכולה לשמש לכתיבת מספרים שליליים במחשב, $(2 = [-1][1] - 2)$ ייכתב $[-1][1]$.

ייצוג זה מאחד את פעולות החיבור (וגם החיסור) במספרים מכוונים ומשמש במבנה המחשב.