

מקרה פרטי של מעגל אפולוניוס בשאלת בגרות

מרים גור

מילות מפתח: גיאומטריה אנליטית, מעגל אפולוניוס, מקומות גיאומטריים

תוכן עניינים

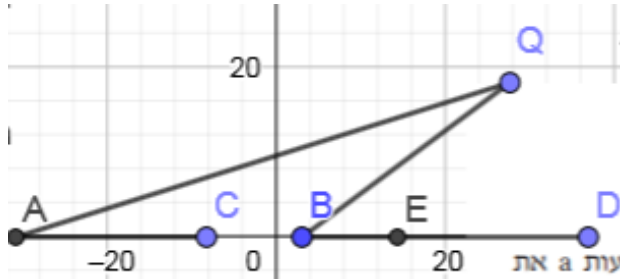
2	 נוסח הבעיה
2	 מקור
2	 רמז
3	 מדוע הבעיה יפה בעיני
4	 פתרון
4	 תובנות משימוש בבעיה בכיתה ו/או המלצות למורים המבקשים להשתמש בבעיה:

תרשים/ציור	נוסח מילולי
נתונות הנקודות $A(-3a, 0)$ ו- $B(3, 0)$. $a > 0$ הוא פרמטר. א. הבע באמצעות a את המקום הגאומטרי של כל הנקודות P המקיימות $\frac{PA}{PB} = 1$. ב. הראה שהמקום הגאומטרי של כל הנקודות Q המקיימות $\frac{QA}{QB} = 2$ הוא מעגל, והבע באמצעות a את שיעורי מרכז המעגל הזה ואת הרדיוס שלו. ג. נתבונן באוסף כל המעגלים אשר משיקים למקום הגאומטרי שמצאת בסעיף א ועוברים דרך מרכז המעגל שמצאת בסעיף ב. נתון כי מרכזי המעגלים האלה מהווים מקום גאומטרי העובר דרך ראשית הצירים. (1) זהה את המקום הגאומטרי הזה. (2) מצא את a , וכתוב את משוואתו של המקום הגאומטרי הזה.	

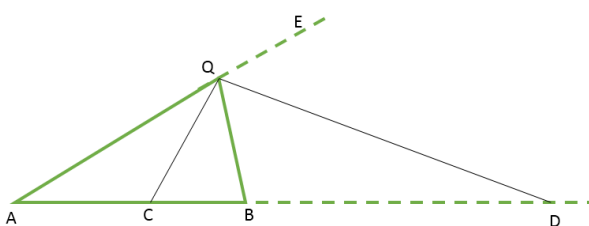
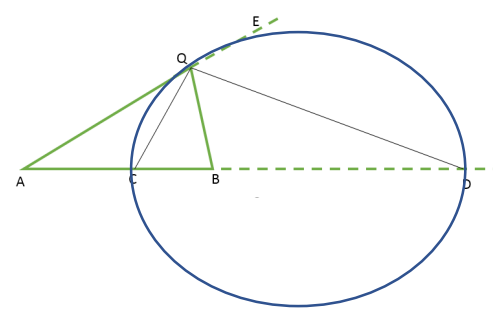
מקור

פירוט	
פיתוח עצמי	
עמית/ה	
ספר לימוד/ בגרות	בגרות מועד קיץ תשע"ח, שאלון 035582
השתלמות מורים או כנס	
לא זוכר/ת	

רמז

תרשים/ציור	נוסח מילולי
בקישור הבא תוכלו לצפות בבניית הפתרון על כל השלבים בגיאוגברה. 	השתמשו בהגדרת המקום הגיאומטרי של מעגל אפולוניוס

1. **אלגנטיות** - אם פותרים את סעיף ב' בדרך טכנית, יש שם השלמה לריבוע עם פרמטרים וטכניקה אלגברית. לעומת זאת, הדרך שהצעתי היא אלגנטית יותר.
2. **הבנת משמעות גיאומטרית** - בצורת הפתרון הזו אני מציעה לחזור למקומות גיאומטריים טרום מערכת צירים. מעגל אפולוניוס וכל ההכללה המתמטית היו הרבה לפני דיקארט ומערכת הצירים הקרטזית שלו. אבל בשביל לפתור את הבעיה בדרך הזו צריך להבין את המשמעות הגיאומטרית של הפתרון ולא דיי בשימוש בנוסחאות (למשל נוסחה לחישוב מרחק בין 2 נקודות).
3. **הכללה** – ברגע שפותרים בדרך הזו, ניתן לראות שמדובר במקרה פרטי של בעיה גדולה יותר, ואז ניתן להגיע להכללות. למשל: מרכז המעגל תמיד יוצא על הישר העובר בשתי הנקודות הנתונות.
4. **שילוב בניה גיאומטרית** - בדרך הזו ניתן להשתמש בכלי של בניות גיאומטריות, כלומר - מציאת 3 נקודות שאינן על ישר אחד ושרטוט מעגל שעובר דרכן. או אפילו במקרה הפרטי הזה – מציאת שתי נקודות שהן קצוות הקוטר ואז לשרטט מעגל על פי המרכז והרדיוס.
5. **דינאמיות** – אם נסתכל על כל הבעיה הרי שיש דינאמיות שמשתנה, היחס המשתנה, ופתרונות המשתנים בהתאם הם כמו חקר של מצבים שונים. לכן הצעתי לנצל את הדינאמיות הזו ולהבין אותה.

תרשים/ציור	נוסח מילולי
	פתרון אלגנטי לסעיף ב': אוסף הנקודות שיחס מרחקיהן מנקודה נתונה אחת לנקודה נתונה אחרת הוא קבוע (שונה מאחד) יוצרות מעגל, מעגל זה נקרא "מעגל אפולוניוס". 1. יש שתי נקודות על ישר AB העונות על התנאים. $C(-a+2,0)$ $D(6+3a,0)$ הסבר: נשרטט משולש ABQ. הרעיון מבוסס על משפט חוצה הזווית הפנימית והחיצונית במשולש: $\frac{AC}{CB} = \frac{QA}{QB} = \frac{DA}{DB}$ 2. לפי ההגדרה של מעגל אפולוניוס, שתי הנקודות הן קצוות קוטר המעגל המבוקש ולכן אמצע הקטע DC הוא מרכז המעגל הרצוי. $E(a+4,0)$ רדיוס המעגל: $EC = ED = 2a+2$ ולכן משוואת המעגל היא: $(x-(a+4))^2 + y^2 = (2a+2)^2$ הסבר: הזווית הנוצרת CQD היא תמיד זווית ישרה. ולכן נשענת על הקוטר. (סכום שתי חצאי זווית שסכומה חצי זווית שטוחה)
שרטוט להסבר 2: 	

תובנות משימוש בבעיה בכיתה ו/או המלצות למורים המבקשים להשתמש בבעיה:

לא הספקתי עדין להציג את הפתרון לתלמידות שלי, אעשה זאת בשנה הבאה. הדילמה היא האם ללמד את ההגדרה של מעגל אפולוניוס כשזו לא בתכנית הלימודים. מאידך, רבות השאלות שעוסקות במקרים פרטיים שלה ובנוסף, הלמידה של הנושא והעמקתו היא לגמרי רלוונטית לתכנית ולכן זו תהיה השקעה ולא בזבוז זמן לדעתי. אשמח לשתף בהמשך את החוויה שלי מהצגת הפתרון.