



## תיקון ציון

### הבעיה

תלמידי כיתה ט' בבית הספר "יובלים להצלחה" השיגו ציונים נמוכים בבחינה במתמטיקה. המורה קיבלה ארבע הצעות לתיקון הציונים:

הצעה ב'		הצעה א'											
<table border="1"> <thead> <tr> <th>הציון במבחן <math>x</math></th> <th>הציון המשופר <math>y</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>20</td><td>24</td></tr> <tr><td>40</td><td>48</td></tr> <tr><td>60</td><td>72</td></tr> <tr><td>80</td><td>96</td></tr> <tr><td>100</td><td>120</td></tr> </tbody> </table> <p>וכך להמשיך, לפי אותה חוקיות</p>	הציון במבחן $x$	הציון המשופר $y$	20	24	40	48	60	72	80	96	100	120	
הציון במבחן $x$	הציון המשופר $y$												
20	24												
40	48												
60	72												
80	96												
100	120												
הצעה ד'	הצעה ג'												
<p><math>x</math> - הציון המקורי</p> <p><math>y</math> - הציון המשופר</p> $y = 10\sqrt{x}$	<p>להוסיף לציון את מחצית הפרש בין 100 לציון</p>												

(I) חשבו על ציון במבחן שקיבלתם לאחרונה (או מבחן שצרוב לכם בזיכרון) ואיך ההצעות א-ד לפקטור היו משפיעות על הציון הסופי.

(II) אבנר טען: "אני קיבלתי 81 ולפי אחת ההצעות אקבל משמעותית יותר מאשר לפי האחרות, אז ברור מה כדאי לי, לא?"

דנה אמרה: "זה לא פייר שתלמידים שממש נכשלו יקבלו תוספת כל כך גדולה, ואלה שהצליחו יקבלו תוספת קטנה יותר..."

על אילו מההצעות לתיקון ציון דיבר כל אחד מהם? נמקו!

(III) בעקבות הדיונים בכיתה, החליטה המורה להתחשב בשני אילוצים:

i. הציון המתוקן צריך להיות גדול מהציון המקורי או שווה לו.

ii. הציון המתוקן ימצא בין 0 ל-100.

מהן ההצעות בהן יכולה המורה לבחור? נמקו.

המורה החליטה לבחור בהצעה ד. נסו להסביר מדוע.



TOP 15

מרחיבים את מעגל המצוינות  
نوسع دائرة التميز



## תוכן עניינים

1.....	הבעיה
4.....	כיצד נוצרה הבעיה?
4.....	ניתוח מיומנויות נדרשות
4.....	המלצות הפעלה
5.....	רמזים אפשריים
6.....	רעיונות נבחרים לפתרון
7.....	שאלות לדין ולהרחבה
7.....	במבט לאחור (לתלמידים)

## כיצד נוצרה הבעיה?

השאלה מבוססת על 'בעיה מן החיים', מתוך הספר "פונקציות חלק ב, בתוך פונקציות וביניהן", המחלקה להוראת המדעים, מכון ויצמן למדע, עמודים 79-89.

**למי הבעיה מיועדת?** לתלמידי כיתה ח' מצוינות, ט' מצוינות או הקבצה א'

### ידע נדרש

פונקציה קווית, קצב שינוי ושיפוע של פונקציה קווית, היכרות בסיסית עם פעולת השורש, היכרות עם ייצוג פונקציה בטבלת ערכים ובגרף.

## ניתוח מיומנויות נדרשות

**הבנת הבעיה והנתונים:** רמה 4 ברמות פיזה.

נדרשת הבנה של ייצוגים שונים של פונקציות נתונות, מעבר בין הייצוגים, ומשמעותם בהקשר של בעיה אותנטית 'תיקון' ציון בבחינה.

**בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה:** רמה 4-5 ברמות פיזה.

נדרשת השוואה בין פונקציות תוך מעבר בין ייצוגים כאשר אחת מהן אינה קווית. בפתרון הבעיה בוחנים תופעות הנובעות מהתנהגות של פונקציות שאינן נובעות באופן ישיר מהפרמטרים שלהן.

**הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך:** רמה 5 ברמות פיזה

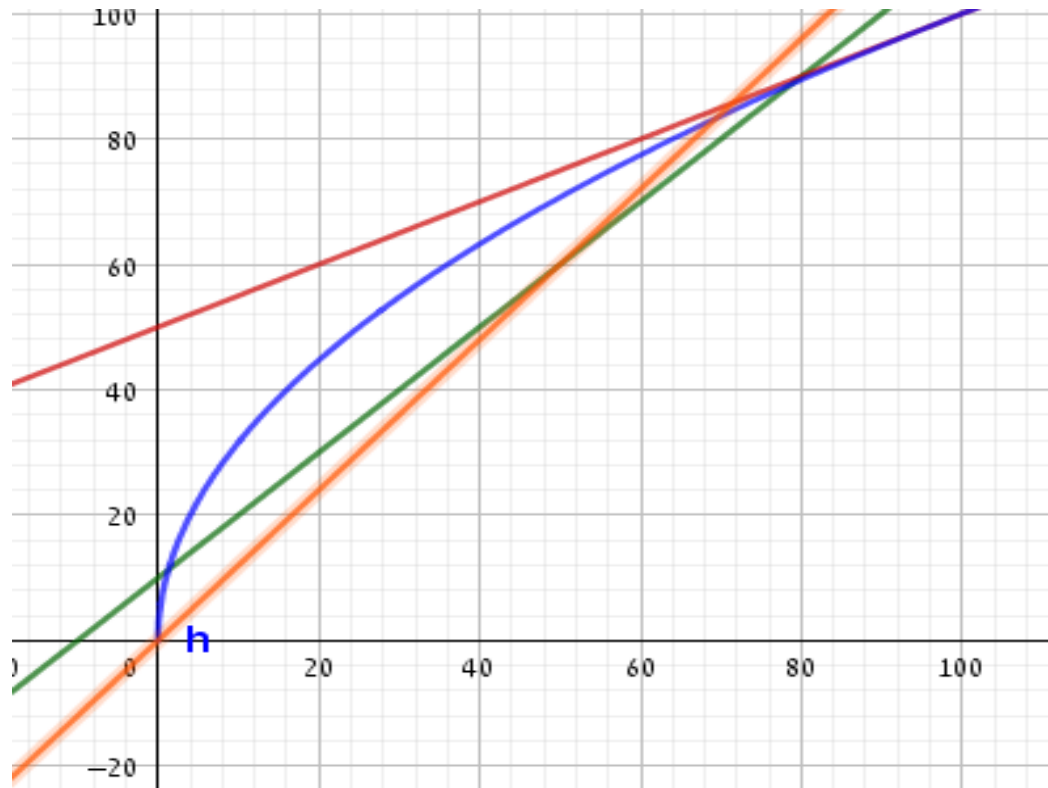
נדרשת יכולת להתייחס לייצוג מתאים של פונקציה, להסיק ולנמק ולהתייחס לפונקציות ה'תוספת'.

## המלצות הפעלה

- ניתן להפעיל שלב 1 בשיטת ג'יקסו, כאשר תחילה כל קבוצת תלמידים לומדת את אחד הייצוגים, ולאחר מכן ממשיכים לעבוד בקבוצות עם "מומחה" לכל אחד מהייצוגים. הדבר מאפשר דיפרנציאציה מול יכולות התלמידים, כאשר תלמידים חזקים יותר יקבלו לחקור את אחד הייצוגים המורכבים יותר.
- בשלב 1 ניתן גם לבקש מכל תלמיד לבדוק ציון מסוים על פי 4 ההצעות, וכך לאסוף מכל הכיתה נתונים ודוגמאות רבות.
- שימוש בציונים אמיתיים שהתלמידים קיבלו בבחינה קודמת (אולי במקצוע לימוד אחר) יכול להוסיף רלוונטיות לשאלה.

## רמזים אפשריים

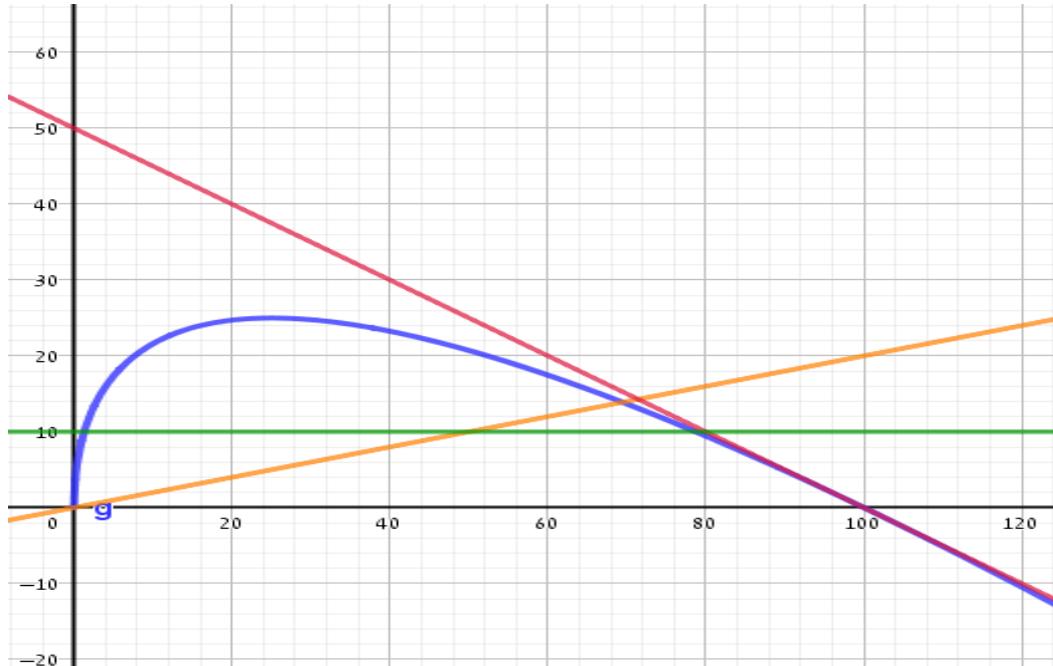
- ניתן להתחיל בזיהוי התופעות באמצעות טבלת ערכים של פונקציות ולעבור להכללת התופעות, תוך התייחסות לתבנית האלגברית של הפונקציות.



- שרטוט הגרפים של ההצעות השונות: (הצעה א' – ירוק, הצעה ב' – כתום, הצעה ג' – אדום, הצעה ד' – כחול). אפשר להציע לשרטט את הגרפים על מערכת צירים אחת על סמך הנתונים, או לתת את הגרפים ולפענח איזה מהם מתאים לאיזו הצעה.
- אפשר להציע לשרטט גרף של התוספת בלבד. במקרה כזה התוצאה תהיה:

## רעיונות נבחרים לפתרון

- ההצעות הלא הוגנות עליהן מצביעה דנה הן ג-ד. הצעה ג מציעה לתלמידים שממש נכשלו לקבל תוספת גדולה יותר, ולא להצליח תוספת קטנה הגרפים מכסים את הכתובית למטה יותר, שכן ככל שהציון נמוך יותר הפער בינו לציון 100 הוא גדול יותר מהפער בין ציון גבוה לציון 100. לכן במקרה של ציון נמוך התוספת תהיה גדולה יותר.



הצעה ד גם מציעה לתלמידים שממש נכשלו לקבל תוספת גדולה יותר, ולא להצליח תוספת קטנה יותר, כמו שמודגם בטבלת הבאה:

$x$	9	16	25	36	49	64	81	100
$y = 10\sqrt{x}$	30	40	50	60	70	80	90	100
תוספת	21	24	25	24	21	16	9	0

- ברור שאילו  $i$  מתקיים בהצעות א', ב'. כדי לבדוק אם הצעות ג-ד מקיימות את אילו  $i$ , יש לבדוק את התחום בו מתקיימים אי השוויונות:

$$0.5x + 50 \geq x$$

$$10\sqrt{x} \geq x$$

הערה: אין צורך לפתור את אי השוויון השני באופן פורמלי. אפשר להגיע לתשובה ע"י חלוקה ב- $\sqrt{x}$ , ואז ברור שאי השוויון המתקבל  $10 \geq \sqrt{x}$  מתקיים עבור  $x$  בין 0 ל-100. אילו  $ii$  מתקיים בהצעות ג', ד'. לא מספיק להתייחס לקצוות. יש לציין ששתי הפונקציות בהצעות ג', ד' עולות.

- כדי לדון בהחלטה של המורה לבחור בהצעה ד', אפשר להתייחס לפונקציות המתארות את התוספת לציון המתוקן בהצעות ג', ד',

$$\text{בהצעה ג: } 50 - 0.5x$$

$$\text{ובהצעה ד: } 10\sqrt{x} - x$$

אפשר להיוכח שבשתי ההצעות, התוספות קטנות מהציון המקורי החל מציון מסוים.

(בהצעה ג:  $50 - 0.5x \leq x$ , החל מציון 33.3 בבחינה.

ובהצעה ד:  $10\sqrt{x} - x \leq x$ , לאחר פישוט נקבל את אי השוויון  $5\sqrt{x} \leq x$ , שמתקיים החל מציון 25 בבחינה.)

עובדה זו אינה נותנת תיעדוף להצעה ד'. אלא שתוך התבוננות מעמיקה בהצעה ד' ניתן לזהות תופעה מעניינת: התוספת הולכת וגדלה עד הציון 25, ואח"כ הולכת וקטנה, כמוצג באמצעות טבלת הערכים:

$x$	9	16	25	36	49	64	81	100
$10\sqrt{x} - x$	21	24	25	24	21	16	9	0

לכן ההשוואה בין פונקציות ה'תוספת' בטבלה:

$x$	9	16	25	36	49	64	81	100
$10\sqrt{x} - x$	21	24	25	24	21	16	9	0
$50 - 0.5x$	45.5	42	37.5	32	26.5	18	9.5	0

מאפשרת לזהות שהתוספת בהצעה ד' תמיד קטנה מהתוספת בהצעה ג'. הדברים הופכים להיות ברורים יותר מהתבוננות בגרפים לעיל. זו דוגמה לשיקול שהוביל את המורה להחלטה לבחור בהצעה ד'.

## שאלות לדין ולהרחבה

הרחבת הבעיה:

- בבעיה התייחסתם לעמדתם של התלמידים אבנר ודנה ועמדת המורה. הציעו גישור אפשרי בין העמדות.
- נסחו הצעה  $f(x)$  שתשפר רק את הציונים בין 50 ל-100 ותקיים:  $f(50)=50$  ו-  $f(100)=100$ .
- הצעות ג' וד' הן למעשה ממוצעים. ממוצע רגיל, וממוצע הנדסי בין הציון ל 100. ביניהם מתקיים (חלק מ) [אי שוויון הממוצעים](#): הממוצע "הרגיל", האריתמטי, גדול מהממוצע ההנדסי, והשוויון מתקיים רק כשהערכים שווים (כלומר בציון 100)
- אפשר לבדוק גם מה קורה למגמות השונות בין ההצעות השונות לציונים גבוהים מ 100 או קטנים מ 0. אילו מאפיינים נשמרים, ואילו משתנים?

## במבט לאחור (לתלמידים)

- כתבו מה למדתם מתהליך פתרון הבעיה.

- באילו חלקים במהלך פתרון הבעיה השתמשתם בייצוגים שונים (גרפי, טבלה, אלגברי, מילולי), ומה תרם כל ייצוג? מתי ובמה עזר לכם מעבר מייצוג לייצוג?