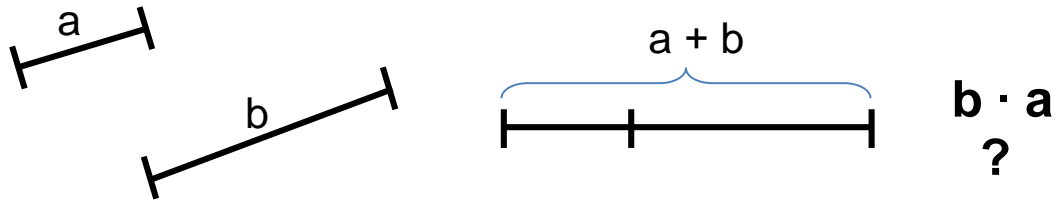




מכפלת אורכים

הבעיה

א. נתונים שני קטעים במישור. אם נצמיד אותם זה לזה לאורך אותו ישר, נקבל קטע שאורכו סכום האורכים של הקטעים. עליכם לבנות קטע שאורכו **מכפלת** האורכים של הקטעים הנתונים.



- ב. אלכס ורות דנו בבעיה. רות טענה שהבעיה לא הגיונית, כי ניתן למדוד פעם בסנטימטרים ופעם במילימטרים, ולקבל בכל פעם מספרים אחרים. אלכס טען שאין בכלל בעיה, וכמו שאפשר לחבר אורכים אפשר גם להכפיל אותם: אפשר להתייחס לאורך כמספר ללא יחידות, להכפיל את שני המספרים, ולבנות קטע חדש שאורכו יהיה המכפלה, באותן יחידות המידה בהן נמדדו שני הקטעים המקוריים.
- מה דעתכם על העמדות של רות ושל אלכס? תנו דוגמה המחזקת את אחד הטעונוים.
- ג. היעזרו [ביישומון](#) כדי לבנות קטע שאורכו מכפלת האורכים של שני הקטעים הנתונים.



TOP 15
מרחיבים את מעגל המצוינות
نوسح دائرة التميّز



תוכן עניינים

1.....	הבעיה
3.....	רקע לבעיה
3.....	ניתוח מיומנויות נדרשות
3.....	המלצות הפעלה
4.....	רמזים אפשריים
4.....	רעיונות נבחרים לפתרון
6.....	שאלות לדיון
6.....	במבט לאחור (לתלמידים)

רקע לבעיה

בעיה זו מיוחסת לרנה דקרט (René Descartes 1596–1650). היא מייצגת רגע מכונן בהיסטוריה של המתמטיקה, שבו התעצב הקשר בין גאומטריה ואלגברה, גישה שממנה צמח התחום של גאומטריה אנליטית. אמנם היום אנחנו קוראים למערכת הצירים "מערכת קרטזית" על שמו של רנה דקארט, אך המערכת בת שני הצירים היא פיתוח מאוחר יותר. עבודתו של דקארט עצמו התמקדה בסימון אורכים גיאומטריים על ידי משתנים, ופתרונות אלגבריים לבעיות גיאומטריות.

הבעיה מנוסחת לכאורה במונחים גיאומטריים של קטעים ואורכים, והפתרון שלה דורש סימון האורכים במשתנים אלגבריים, כתיבת משוואה מתאימה וביצוע פעולות אלגבריות על המשוואה הזאת לקבלת התוצאה הרצויה.

למי הבעיה מיועדת? לתלמידי כיתה ח ו-ט (מצוינות או הקבצה א')

ידע נדרש: פתרון הבעיה נשען על דמיון משולשים ובנוסף, ניתן לפתור אותה על סמך משפט תאלס בלבד. לא נדרש ידע מוקדם בבניות בסרגל ומחוגה, כיוון שהאפשרויות בתכנות מתמטיות כגון גיאוגרפה מייצרות את האפשרויות ואילוסי הבניה.

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים, ובניית מודל שלה: רמה 5

- הסיטואציה "קונקרטי" בתוך העולם של היישומן. יש לפענח את הכלים הזמינים, ובפרט את הכלי שאיננו סטנדרטי בגיאוגרפה – מעגל ברדיוס 1. התלמיד צריך לתרגם את הנתונים למובנים של משולשים דומים וזהו אחד המודלים האפשריים לפתרון הבעיה.

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה: רמה 6

- נדרשת גישה חדשנית, שימוש לא שגרתי בפרופורציות במשולשים דומים.

הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך: רמה 6

- לתקשר מדוע יש צורך בקטע בעל אורך ידוע (1), ומדוע קטע כזה פותר את הבעיה שהציגה רות.

המלצות הפעלה

מומלץ להפעיל את הבעיה בזוגות או בקבוצות קטנות – סביבה כזאת תאפשר לתלמידים להציע רעיונות ולפתח אותם ביחד.

חלק א' מכיל את הבעיה ללא הכוונה ורמזים. בכיתות חזקות במיוחד ניתן להסתפק בחלק א' בלבד ולהציג רק אותו לתלמידים. אחרת יש לעבור מיד לדיון של חלק ב'.

לאחר חלק ב' מומלץ לערוך דיון במליאה כדי לבסס את הבעייתיות: "אורך" המכפלה תלוי ביחידות המידה. כלומר הבעיה כפי שהיא מוצגת לא ניתנת לפתרון, וחסר נתון. אפשר לשאול את התלמידים איך אפשר להפוך את הבעיה לפתירה? איזה נתון אפשר להוסיף?

היישומן בסעיף ג' מכיל נתון כזה: יחידת המידה. שרטוט קטע (או מעגל) באורך (רדיוס) של 1 קובע את יחידות המידה של השרטוט, ולא מאפשר למדוד את אותו הקטע ביחידות מידה שונות ולקבל אורכים שונים. לאחר ההבהרה הזו ניתן לחזור לקבוצות העבודה הקטנות לעבודה עם היישומן.

ניתן לפתור את השאלה גם ללא היישומון, אבל השימוש בו מגדיר בצורה ברורה מה זה אומר "לבנות" קטע - להשתמש באפשרויות שבסרגל הכלים כדי ליצור קטע באורך הדרוש.

הערה בנוגע ליחידות אורך ושטח

מובן נוסף שבו הבעיה לא פתירה הוא אם מתבוננים ביחידות המידה גם בלי לעבור ליחידות אחרות. אורך נמדד ביחידות אורך. כאשר מכפילים שתי יחידות אורך (למשל 1 מטר כפול 1 מטר) מקבלים יחידת שטח (1 מ"ר). לכן בעוד שאפשר להכפיל את המספרים שמייצגים את האורך של הקטעים ולהתייחס לתוצאה כאל אורך – אי אפשר לבנות "קטע באורך מכפלת אורכים". מכפלת אורכים היא לא אורך אלא שטח. אם התנגדות זו תעלה מהכיתה, אפשר להתייחס אליה, אחרת אנחנו לא ממליצים להיכנס לדיון הזה. תשובה אפשרית להתנגדות זו ניתן למצוא כבר בתשובה של אלכס. אנחנו לא באמת מכפילים אורכים, אלא רק את המספרים המייצגים את האורכים. הבעייתיות שרות מעלה עולה מתוך כך. מכיוון שאנחנו לא באמת יכולים להכפיל אורכים, השאלה באיזו יחידה מוזדדים הופכת להיות משמעותית.

רמזים אפשריים

- אילו פעולות נוכל לעשות עם הקטעים הנתונים – כל אחד בנפרד ושניהם ביחד?
- האם קטע שאורכו כמכפלת הקטעים הנתונים יהיה ארוך או קצר יותר מכל אחד מהקטעים הנתונים? האם התשובה תלויה ביחידות המדידה?
- באילו נושאים בגאומטריה אתם מכירים פעולות של חילוק (יחס) או כפל בין אורכים של קטעים?
- מה תורם לנו הקטע שאורכו 1?

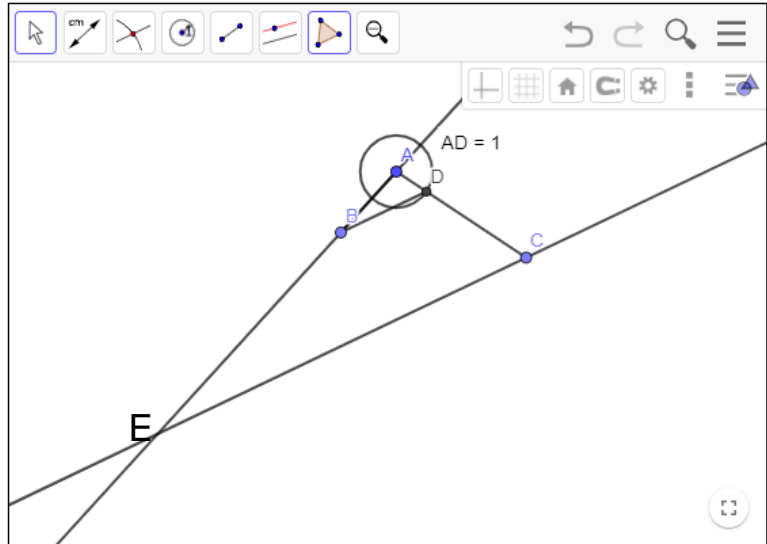
רעיונות נבחרים לפתרון

רות צודקת, הבעיה כפי שהיא מנוסחת לא ניתנת לפתרון. אחת הדרכים לראות זאת היא לשאול האם המכפלה מגדילה או מקטינה את האורך - וגם זה תלוי ביחידות המידה. (זאת שאלה שאפשר לתת כרמז לסעיף א').

לדוגמה, שני קטעים שאורך כל אחד מהם 100 ס"מ אמורים לגדול מאוד לכדי 10000 ס"מ במכפלה. אבל אם נמדוד את אותם שני אורכים בדיוק במטרים נקבל תרגיל של 1 כפול 1, כלומר המכפלה אמורה להיות קטע באותו האורך.

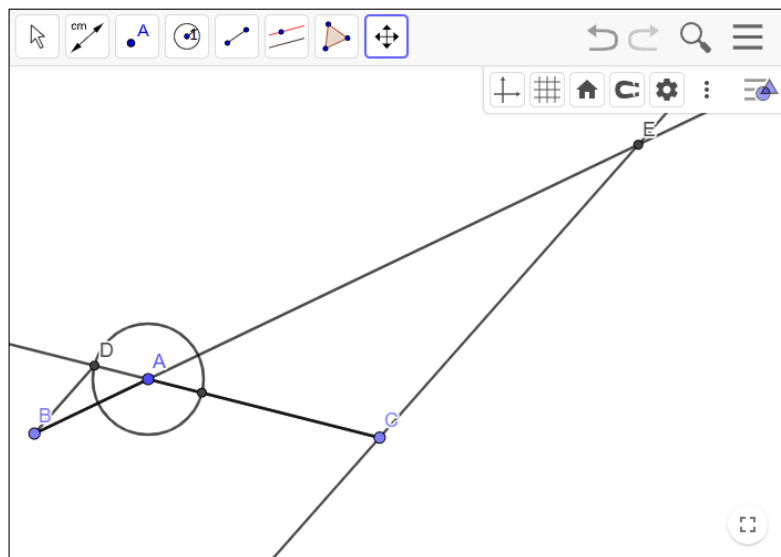
הפתרון מצריך שני רעיונות, שאפשר להפנות אליהם את תשומת הלב כרמזים: כדי להתגבר על הבעייתיות שראינו בסעיף א' יש להוסיף כנתון את יחידת המידה, כלומר קטע נוסף באורך 1. ביישומון הדבר בא לידי ביטוי בבניית מעגל ברדיוס 1, אשר יכול להקצות קטע שאורכו יחידה אחת. שנית, הפתרון מצריך שימוש במשולשים דומים (או במשפט תאלס).

פתרון אפשרי של הבעיה ייראה כך:
 בעזרת מעגל יחידה, נקצה על הקטע AC קטע חדש AD שאורכו 1.
 נעביר קטע CE שמקביל לקטע BD.
 משולש ADB דומה למשולש ACE
 לכן מתקיים: $AC/AD = AE/AB$



ומכיון ש $AD=1$ נקבל:
 $AE = AB \cdot AC$

אותם שיקולים פועלים גם אם הקטע AD מוקצה על המשך הקטע CA, כלהלן:



שאלות לדין

הדין בבעיה יכול לעסוק בסוגיות הבאות:

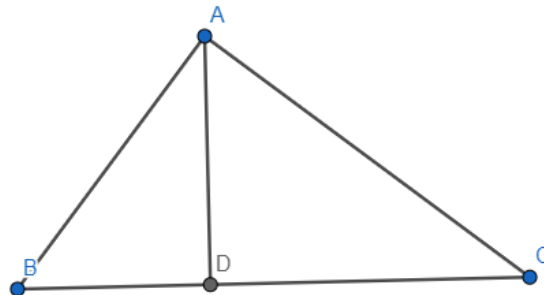
- כיצד ניגשתם לבעיה? מה היו פעולותיכם הראשונות? האם הן קידמו אתכם? אם לא, מה עשיתם אחר כך?
- באיזו מידה אתם בטוחים בתשובה שאליה הגעתם? מה יגדיל את מידת הביטחון שלכם?
- האם ניתן היה לבצע בנייה שונה מהבנייה שעשיתם?

שאלות המשך אפשריות

- כפי שבנינו קטע שאורכו מכפלה של מספרי האורכים, אפשר לשאול שאלות דומות על פעולות אלגבריות אחרות. באופן דומה, לא ניתן לבנות קטע שאורכו שורש של אורך קטע נתון (אלא אם כן נתון קטע באורך ידוע כמו 1).
- מעניין לשים לב שלמרות זאת, ניתן לבנות קטע שאורכו הממוצע ההנדסי של שני קטעים נתונים – ובניה זו לא תלויה ביחידות המידה:

אם נעביר במשולש ישר זווית ABC גובה ליתר BC, מדמיון משולשים נקבל כי:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$
$$AD = \sqrt{CD \cdot BD}$$



כלומר הגובה ליתר במשולש ישר זווית הוא הממוצע ההנדסי של שני חלקי היתר המוקצים על ידי הגובה.

במבט לאחור (לתלמידים)

כדאי לבקש מכל תלמיד/ה לכתוב רפלקציה על תהליך העבודה:

- באילו אסטרטגיות השתמשתם לפתרון הבעיה?
- מה למדתם במהלך פתרון הבעיה? (איזה רעיון חדש, או דרך עבודה מעניינת ויעילה?)
- מה הביא לפריצת הפתרון, ההוכחה, ההנמקות?