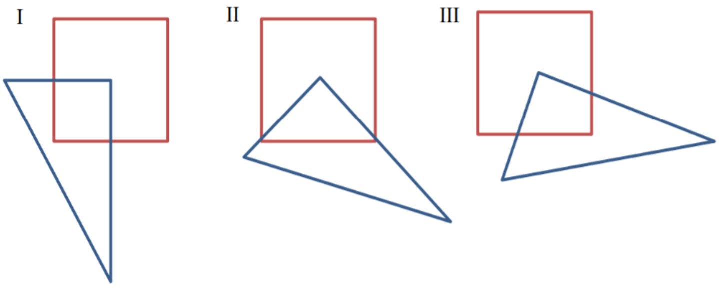
مسألة المربّعات الثلاثة

المسألة

معطاة 3 مربعات متطابقة وقد وضعت عليها 3 مثلثات قائمة الزاوية متطابقة بحيث أن رؤوس الزوايا القائمة في مركز المربّعات.

رتبوا الرسومات حسب كبر المساحة المشتركة بين المربّع والمثلّث



اشرحوا السبب لاختياركم هذا الترتيب!

أعِدّت المضامين من قِبل معهد وايزمان للعلوم، بتمويل من صندوق ترامب.

תוכן עניינים

كيف نشأت المسألة

تعتمد المسألة على مهمة بحث الدرس (Lesson Study) والتي تمت كتابتها في قسم تدريس العلوم, وقد تم تصويرها وهي معروضة في موقع "عدسة".

تدور المسألة حول مساحة محدودة داخل مربّع وبين شعاعي زاوية قائمة رأسها يقع في مركز المربّع (أي في تقاطع الأقطار).

تعدد إمكانيات دوران المثلث تخلق وضعيات مختلفة, وتمكن من البحث في المساحة الناتجة في كل وضعية.

توفّر المسألة إمكانية رؤية عائلة لانهائية من الأشكال الرباعية المتساوية في المساحة والغير متطابقة, وتسنح ببرهان تساوي المساحة.

لمن المسألة معدّة؟ لطلاّب الصف الثامن المتفوّقين أو التاسع (متفوّقين او تصنيف أ).

المعرفة المطلوبة: صفات المربّع, التطابق في المثلثات, حساب المساحة.

تحليل المهارات المطلوبة

فهم المسألة والمعطيات: مستوى 4. الوضع واضح جدًا, لكن مطلوب من الطلاب إعطاء المعنى الدقيق بالاعتماد على مصطلح "مركز المربّع", مثلاً "تقاطع الأقطار"

اختيار استراتيجية الحل وتطبيقها: مستوى 4. سلسلة العمليات التي من المفترض أن يقوم بها الطلاب (بناء وسائل إيضاح, تطابق المثلثات وما إلى ذلك) معروفة لديهم, لكن سلسلة العمليات غير موضحة في المسألة بشكل صريح, وعليهم استخدامها بشكل مرن من أجل استنتاج نتائج.

تقييم الحل: مستوى 5. مطلوب منهم القدرة على تقييم خطواتهم بشكل مرِن وشرح تفسيرهم وعملية استنتاج النتائج.

نصائح لطرح المسألة

- يمكن طرح المسألة في سياق صفات المربع وتطابق المثلثات.
- الوضعان الأولان واضحان ومن السهل برهان أن المساحات اشكّل ربع مساحة المربّع الكبير.
- يمكن مناقشة الوضع الثالث في أزواج, مع عرض تفسيرات مختلفة, متعارف عليه (تطابق المثلثات) أو بديهي أكثر (إطالة قوائم المثلث وأخذ تماثل الدوران بالحسبان).

رموز ممكنة

يمكن استخدام التطبيق التالي.

هذا التطبيق يجسّد تغير الأوضاع بشكل متحرّك, ويعطي رمزًا لاستراتيجية الحل.

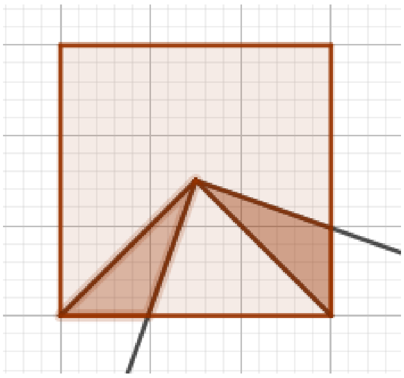
من خلال بناء الوضعيات يمكننا تمييز مثلثات قائمة الزاوية متطابقة, والتي نحصل عليها نتيجة التدوير. التطبيق يجسّد ذلك. المساحة التي تنقص من إحدى الجهات عند التدوير يضاق من الجهة الأخرى. لذلك فإن المساحات الثلاث متساوية. بقي على الطلاب برهان التطابق بين المثلث الذي نقص والمثلث الذي أُضيف.

أُعِدّت المضامين من قِبل معهد وايزمان للعلوم، بتمويل من صندوق ترامب.

أفكار مختارة للحل

التخطيط التالي يوضّح المثلثات المتطابقة التي تنتج خلال دوران المثلث (رسمة III), مرة بالمقارنة مع رسم I ومرة بالمقارنة مع الرسم II

1. بالمقارنة مع الرسم I: عند تأمّل الشكل الرباعي الذي ينتج عن تدوير الزاوية نسبة للمربّع: كل واحد من قائمي الزاوية القائمة موجود بالضرورة في ربعٍ آخر من أرباع المربّع. بشكل بديهي, يظهر أن دوران 90 درجة حول رأس الزاوية القائمة سينقل "قسم أ" الأول الى "قسم أ" آخر, وهكذا أيضًا بالنسبة لقسم ب. يمكن ترجمة هذه البديهة الى برهان من خلال تطابق المثلثين المشار اليهما "قسم ب" (ز. ض. ز.). هنا تتدخل فرضية حول ما معنى "مركز المربّع", مثلاً تقاطع المستقيمين اللذان يقسمان المربّع الى مستطيلين متطابقين. هكذا يمكن ان نرى أن المربّع المحدود بالزاوية القائمة مكوّن من قسم أ وقسم ب وكلاهما معًا يكوّنان ربعًا كاملاً, ومساحته هي ربع المربّع.
2. بالمقارنة مع الرسم II: الفكرة مشابهة, الا أن تطابق المثلث الذي ينقص والذي يُضاف تعتمد على نظرية تطابق ز. ض. ز., بحيث توجد في كل مثلث زاوية ذات 45 درجة, وضلع يساوي نصف قطر المربّع.



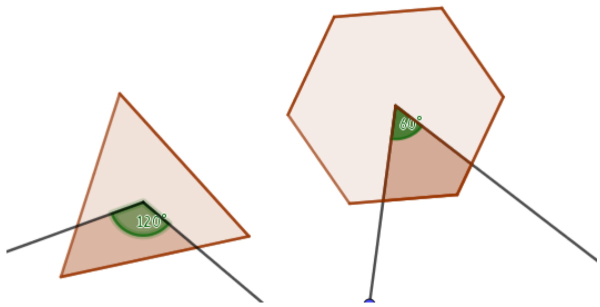
أسئلة للنقاش

- يمكن السؤال عن صفات المربّع الناتج (ضلعان متجاوران متساويان وزاويتان متقابلتان قائمتان)

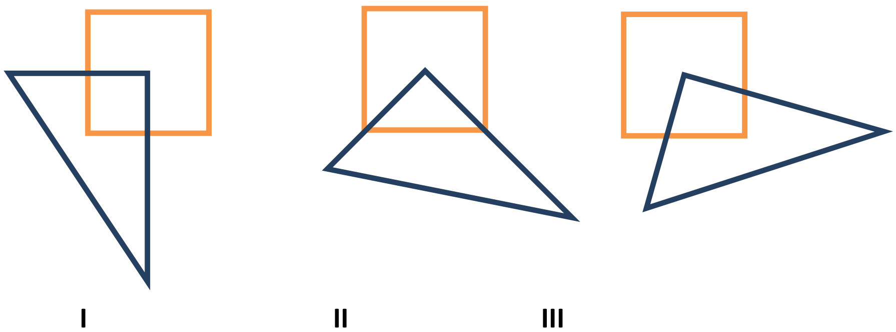
يمكن تعميم المسألة, نسأل: هل توجد أشكال أخرى, غير المربّع, يمكن أن نحصل على أشكال ذات مساحات متساوية من تدوير زاوية عليها؟ يمكن طرح سؤال مشابه, بصورة مختلفة: ما الذي يميز المربّع بحيث يمكن الحصول على هذا التسلسل؟ طبعًا يمكن الإجابة بأكثر من طريقة, الصفة الأساسية للمربّع والتي تجيب عن هذا التساؤل هي أن المربّع هو شكل إذا قمنا بتدويره حول مركزه 90 درجة فإن المربّع يتّحد مع المربّع الأصلي. هذه صفة "قوية"! شكل رباعي غير المربّع لا يملك هذه الصفة. من المهم الانتباه أن هذه الصفة لوحدها تكفي لنفاذ "الشرح" المعطى سابقًا.

- من هنا, فإنه بإمكاننا بناء أوضاع مشابهة في كل مضلّع منتظم وبالزاوية المناسبة, مثلاً تدوير زاوية ذات 60 درجة في سداسي منتظم, أو زاوية 120 درجة حول تقاطع القطع المتوسطة في المثلث متساوي الأضلاع.

أعِدّت المضامين من قِبل معهد وايزمان للعلوم، بتمويل من صندوق ترامب.



- مسألة طي الورق في موقع معهد وايزمن
- سؤال من موقع عدسة:
لوِّنوا بقلم رصاص المساحة المشتركة بين المثلث قائم الزاوية والشكل الرباعي في كل واحد من الرسوم المعطاة (رأس الزاوية القائمة في المثلث موضوع في تقاطع الأقطار).



رتِّبوا الأشكال الملوّنة حسب المحيط من الأصغر الى الأكبر. علّلوا.

نظرة الى الخلف (للطلاب)

من المفضّل أن تطلبوا من كلّ طالب/ة أن يكتب لمحة عن سيرورة العمل:

- أيّ استراتيجيّات استخدمتم لحلّ المسألة؟
- ماذا تعلّمتم خلال حلّ المسألة؟ (أيّ فكرة جديدة، أو طريقة عمل ناجعة ومثيرة للاهتمام؟)
- ماذا كانت الانطلاقة في الحلّ، البرهان، التفسيرات في البنود 1,2 وما الذي ساعد في الحلّ في البنود 3,4؟

أعِدّت المضامين من قِبل معهد وايزمان للعلوم، بتمويل من صندوق ترامب.