מהירות ממוצעת

הבעיה

וונדר-וומן טסה במטוסה הבלתי-נראה במהירות 400 קמ"ש מאי אחד באוקיינוס לאי שני, ולאחר שהגיעה לאי השני חלה תקלה במטוס ולפיכך היא הפחיתה את מהירותה בחצי, הסתובבה וטסה בחזרה לאי הראשון.

1. מהי המהירות הממוצעת בה עברה את כל המסלול?
   א. נחשו באופן מושכל.
   ב. חשבו ובדקו את הניחוש שלכם.
2. האם התשובה שקיבלתם בחישוב הפתיעה אתכם? אם כן - מהי ההפתעה, והאם תוכלו להסביר את התשובה הנכונה לשאלה?
3. נסו להגיע לחוקיות כללית עבור מקרים דומים עם מהירויות אחרות:
   א. ביחס מהירויות הלוך וחזור של 2:1
   ב. ביחס מהירויות הלוך וחזור כללי

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

תוכן עניינים

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

נוסח אלטרנטיבי

למורים שיעדיפו סיפור מסגרת "מציאותי" יותר נציע את הנוסח הבא:

אופנוען נסע מעיר א' לעיר ב' במהירות של 200 קמ"ש. בהגיעו לעיר ב' עצר אותו שוטר בגין נהיגה במהירות מופרזת והוא קיבל דו"ח תנועה עם קנס בסכום כסף גבוה. מושפע מהקנס אותו קיבל הוא הפחית את מהירותו בחצי כשנסע בדרך חזרה מעיר ב' לעיר א'.

1. מהי המהירות הממוצעת בה עבר את כל המסלול?
   א. נחשו באופן מושכל.
   ב. חשבו ובדקו את הניחוש שלכם.
2. האם התשובה שקיבלתם בחישוב הפתיעה אתכם? אם כן - מהי ההפתעה, והאם תוכלו להסביר את התשובה הנכונה לשאלה?
3. נסו להגיע לחוקיות כללית עבור מקרים דומים עם מהירויות אחרות:
   א. ביחס מהירויות הלוך וחזור של 2:1
   ב. ביחס מהירויות הלוך וחזור כללי

רעיונות לפתרון

שאלה 1, סעיף א':

הטעות האינטואיטיבית הנפוצה במקרה זה היא לענות שהממוצע החשבוני של שתי המהירויות (משמע, 300 קמ"ש) זו המהירות הממוצעת.

אם בחרנו בנוסח המציאותי (רוכב אופנוע) חשוב להדגיש בפני התלמידים שאנחנו לא מחשיבים את זמן העצירה כחלק מהזמן שלקח לרוכב האופנוע להגיע מעיר א' לעיר ב'.

שאלה 1, סעיף ב':

גם אם התלמידים חישבו עבור מרחק קונקרטי בסעיף א' – יש צורך לחשב עבור מרחק כללי. נסמן מרחק זה ב-x. הזמן שלקח המסע בדרך הלוך הוא $\frac{400}{x}$ ובדרך חזור הוא $\frac{200}{x}$, ולפיכך המהירות הממוצעת היא:

$$v_{avg} = \frac{2x}{\frac{x}{400}+\frac{x}{200}} = \frac{2x}{\frac{x}{400}+\frac{2x}{400}} = 2x : \frac{3x}{400} = \frac{800x}{3x} = 266\frac{2}{3} \text{ קמ"ש}$$.

שאלה 2:

כאמור, האינטואיציה של התלמידים היא בד"כ לחשב את המהירות הממוצעת כממוצע החשבוני של המהירויות, ולכן יש שאלה המאפשרת להם לבצע רפלקציה על הציפייה שהייתה להם ועל התוצאה המפתיעה. על מנת להבין את המשמעות של התשובה הנכונה ניתן להציע לתלמידים לבחור מרחק קונקרטי בין שתי הנקודות ולחשב את המהירות הממוצעת (כלל המרחק חלקי כלל הזמן) ולהיווכח בעצם שהתשובה אינה 300 קמ"ש. כיוון שהתשובה 300 קמ"ש כל כך אינטואיטיבית, רצוי לשאול כיצד ניתן לשנות את השאלה כך שהתשובה באמת תהיה ממוצע חשבוני של המהירויות, ומדוע המצב המתואר שונה. התשובה לשאלה זו היא שכאשר נוסעים בשתי מהירויות קבועות למשך **פרקי זמנים** שווים, המהירות הממוצעת היא ממוצע המהירויות (את זה קל

להסביר או להראות אלגברית). כיוון שהמכונית מבלה יותר זמן במהירות הנמוכה, המהירות הממוצעת קרובה יותר למהירות הנמוכה.

זוהי תובנה חשובה המתייחסת למהירות ממוצעת כממוצע משוקלל:

המהירות הממוצעת היא ממוצע משוקלל של המהירויות, כאשר המשקלים הם פרופורציוניים לפרקי הזמן שהגוף היה בתנועה בכל אחת מהמהירויות השונות. לפיכך, בהתחשב שהדרך חזור ארכה כפליים מהזמן שארכה הדרך הלוך, ניתן לחשב את המהירות הממוצעת גם כך:

$$v_{avg} = \frac{1 \cdot 400 + 2 \cdot 200}{1+2} = \frac{800}{3} = 266\frac{2}{3} \text{ קמ"ש}$$

שאלה 3:

זוהי שאלה אופציונלית לתלמידים החזקים והיא מכלילה את התוצאה באמצעות שימוש בפרמטרים.

סעיף א': נסמן את המהירות הנמוכה ב-v ואת הגבוהה ב-$2v$:

$$v_{avg} = \frac{2x}{\frac{x}{2v}+\frac{x}{v}} = \frac{2x}{\frac{x}{2v}+\frac{2x}{2v}} = 2x : \frac{3x}{2v} = \frac{4xv}{3x} = 1\frac{1}{3}v \text{ קמ"ש}$$

סעיף ב': נסמן את יחס המהירויות ב-$a:b$:

$$v_{avg} = \frac{2x}{\frac{x}{av}+\frac{x}{bv}} = \frac{2x}{\frac{bx}{abv}+\frac{ax}{abv}} = 2x : \frac{ax+bx}{abv} = \frac{2abvx}{(a+b)x} = \frac{2ab}{a+b}v \text{ קמ"ש}$$

ממוצע זה נקרא הממוצע ההרמוני של שתי המהירויות.

דיון ולהרחבה

מעניין לשקף לתלמידים שבאותה שאלה פגשנו בשלושה סוגי ממוצעים – ממוצע חשבוני (באינטואיציה הנאיבית הנפוצה שמובילה לטעות), ממוצע משוקלל וממוצע הרמוני.