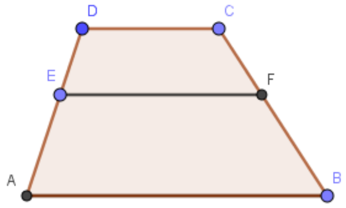
הבעיה

בטרפז כללי ABCD העבירו קטע EF שמקביל לבסיסים. נתון ששני הטרפזים שנוצרו – ABFE ו- EFCD – דומים.



1. צורות נקראות "דומות" אם אחת מתקבלת מהשנייה בפעולה של "זום אין" או "זום אאוט". הציעו הגדרה מתמטית לטרפזים דומים. האם הגדרתכם זהה להגדרה של משולשים דומים?
2. הביעו את אורך הקטע EF באמצעות האורכים של בסיסי הטרפז AB ו- CD.
3. הקטע EF תמיד יהיה קרוב יותר לבסיס הקצר של הטרפז המקורי ABCD מאשר לבסיסו הארוך. הסבירו מדוע, ונסו להוכיח.

המחלקה להוראת המדעים
TOP 15 מרחיבים את מעגל המצוינות
نوسّع دائرة التميّز
THE EDDIE & JULES TRUMP FAMILY FOUNDATION קרן טראמפ

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

תוכן עניינים

הבעיה 1
רקע לבעיה 3
ניתוח מיומנויות נדרשות 3
רמזים אפשריים 3
רעיונות נבחרים לפתרון 3
שאלות לדיון 4
במבט לאחור (לתלמידים) 4

רקע לבעיה

ידוע שאורך קטע אמצעים בטרפז שווה לממוצע החשבוני של אורכי הבסיסים. האורך של קטע כללי העובר בתוך הטרפז ומקביל לבסיסים הוא סוג של ממוצע אורכי הבסיסים, במובן שהוא ארוך מהבסיס הקצר וקצר מהבסיס הארוך. מסתבר שלממוצעים שונים (גאומטרי, הרמוני, ועוד) יש משמעות גאומטרית כאורך של קטע מיוחד בטרפז (ראו, למשל, חיבור של J. Wilson מאוניברסיות ג'ורג'יה). בעיה זו מציגה את הממוצע הגאומטרי.

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים, ובניית מודל: רמה 5-6 ברמות פיזה

התלמידים צריכים לבנות מודל מתמטי של דמיון מרובעים, על סמך ראיון מופשט של "זום-אין/זום-אאוט".

בסעיף השלישי נדרש מידול מתמטי של האמירה "קרוב יותר לבסיס הקצר".

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה: רמה 5

ייצוג אורך הקטע EF נשען על אלגברה בסיסית, אך להוכחת הטעה בסעיף ג' אין אסטרטגיה שידועה לתלמידים מראש.

הערכת הפתרון ותקשור שלו, רפלקציה על הדרך: רמה 6

קיים אתגר בתרגום מושגים גרפיים אינטואיטיביים (למשל, שקטע האמצעים מחלק לטרפז אחד יותר "פחוס" – זה נשען על הבסיס הארוך – ואחד יותר "שמן" – זה שנשען על הבסיס הקצר) לטענות והוכחות מתמטיות.

רמזים אפשריים

תלמידים צפויים לנסות להחיל את מושג הדמיון המוכר ממשולשים על המקרה שלפניהם. אך, שלא כמו במשולשים, נדרש גם שוויון (בהתאמה) של זוויות וגם פרופורציה של צלעות. פרופורציה לא מספיקה, כי אורכי הצלעות לא קובעים באופן יחיד את המרובע. גם זוויות המרובע לא קובעות את צורתו עד כדי דמיון. אפשר לעזור לתלמידים להגיע להגדרה של דמיון מרובעים בעזרת שאלות מכוונות, למשל:

- במלבן כל הזוויות ישרות. האם לדעתכם על המלבנים דומים זה לזה?
- במעוין כל הצלעות שוות. האם לדעתכם כל המעוינים דומים זה לזה?

רעיונות נבחרים לפתרון

1. הגדרה של דמיון של מצולעים כלליים, ובפרט של טרפזים, כוללת את שתי תכונות הדמיון המוכרות ממשולשים. שני מצולעים הם דומים אם זוויותיהם שוות בהתאמה ואורכי הצלעות של אחד הם מכפלת אורכי הצלעות של השני במספר קבוע (גורם הפרופורציה).
2. הפרופורציה $\frac{EF}{AB} = \frac{DC}{EF}$ גוררת $EF = \sqrt{DC \cdot AB}$
3. שיקול וויזואלי אינטואיטיבי: ככל שהקטע EF קרוב יותר לבסיס הקטן, הטרפז שנשען על בסיס זה הוא יותר " צר" או "פחוס". קטע האמצעים מחלק את הטרפז לשני טרפזים שאינם דומים – זה שצמוד לבסיס הארוך יותר "ארוך וצר" – כי יש לו אותו הגובה אך בסיסים ארוכים יותר. כדי להפוך אותו לפחות פחוס (ואת הטרפז הקטן ליותר פחוס) יש לקרב את הקטע האמצעים לבסיס הקצר.

4. שיקול מתמטי פורמאלי: קל להראות שהממוצע הגאומטרי $\sqrt{DC \cdot AB}$ קטן מהממוצע החשבוני $\frac{DC+AB}{2}$, ולכן הקטע EF שאורכו $\sqrt{DC \cdot AB}$קרוב יותר לבסיס הקצר.

שאלות לדיון

הדיון בבעיה יכול להרחיב את מושג הממוצע:

- האם/כיצד אפשר להגדיר ממוצע גאומטרי של 3 מספרים או יותר?
- האם הגיוני לדבר על ממוצע גאומטרי של מספרים מכוונים?
- ממוצע משוקלל הוא ממוצע שנותן משקל (אולי שונה) לכל אחד מהמספרים שמחשבים את הממוצע שלהם (סכום כל המשקלים 1). כיצד זה בא לידי בקטעים שונים המקבילים לבסיסי הטרפז?

במבט לאחור (לתלמידים)

כדאי לבקש מכל תלמיד/ה לכתוב רפלקציה על תהליך העבודה:

- כיצד ניגשתם לאתגר של הגדרת דמיון?
- כיצד אתם מבינים כעת את המושג של דמיון?
- מה למדתם במהלך פתרון הבעיה? (איזה רעיון חדש, או דרך עבודה מעניינת ויעילה?)
- מה הביא לפריצת הפתרון, ההוכחה, ההנמקות?