חידוש פני העיר

הבעיה

לצורך עיצוב פני העיר, החליטה עיריית הוד-הפתרון לערוך שינוי בקרקעות בהן היא מאשרת בנייה, ולבקש מבעלי קרקעות מלבניות להקטין את הצלע הארוכה של חלקת האדמה באחוז מסוים (זהה לכולם), ובתמורה להגדיל את הצלע הקצרה של חלקת האדמה באותו אחוז.

1. גלי, נציגת העיריה, טוענת כי כיוון שמגדילים ומקטינים באותו אחוז, השינוי הוגן ולא צריך להפריע לבעלי הקרקעות. מה דעתכם? נמקו.
2. אופיר, בעל מגרש מלבני, מבקש להגדיל דווקא את הצלע **הגדולה** של המגרש המלבני שלו, ולהקטין את הצלע **הקטנה**. הוא חושב שזה ישפר את מצבו. האם הוא צודק? נמקו.
3. דורון, בעלת מגרש מלבני, מעוניינת לקבל בתהליך זה מגרש ריבועי. מה צריכה דורון להציע לעירייה לשם כך? נמקו.

תוכן עניינים

רקע לבעיה

הבעיה הינה "היפוך והשלמה" של בעיה העוסקת בהמרה של מלבן לריבוע על ידי שינוי אורכי צלעותיו. בבעיה המקורית תלמידים מחשבים את השטח המתקבל בתהליך שינוי כזה, וכאן תלמידים מתבקשים להתייחס לטענה כי הקטנה ובעקבותיה הגדלה באחוז נתון היא "הוגנת". לצורך זה על התלמידים להגיע להבנה של מהות השינויים המוצעים, של האופן בו הם משפיעים על האורך, הרוחב והשטח של המלבן, וכן לחשוב על השאלה מה ייחשב הוגן ומדוע. הבעיה מעודדת חשיבה כפלית על אחוזים (למשל הגדלה ב- 15% משמעה כפל ב- 1.15), ובמהלך פתרון הבעיה יגיעו התלמידים להבנה כי מבחינת שטח המלבן אין זה משנה איזו צלע מקצרים ואיזו צלע מאריכים (שינוי סדר הפעולות בכפל איננו משנה את התוצאה). בשלב האחרון, יחשבו התלמידים על האפשרות והתנאים בהם יתקבל ריבועי בתהליך זה. מסתבר שבריבוע כזה, אורך הצלע הוא הממוצע ההרמוני של צלעות המלבן המקורי. זוהי הזדמנות לפתח דיון על ממוצעים פיתגוריים (ממוצע חשבוני, גאומטרי והרמוני) ומשמעותם. במהלך עיבוד הבעיה זוהה הפוטנציאל שבשילוב של ייצוג גרפי עם ייצוג אלגברי של הבעיה.

למי הבעיה מיועדת: לתלמידי כיתה ח' מצוינות או ט' (מצוינות או הקבצה א').

ידע נדרש: היכרות עם מושגים בסיסיים בגיאומטריה, כגון מלבן, ריבוע, היקף ושטח, והבנה של מושג האחוז. מיומנויות מניפולציה של ייצוגים אלגבריים מרובי משתנים עשויה להועיל בפתרון הבעיה.

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים, שרטוט ובניית אסטרטגיה לפתרון סעיפים 1-2: רמה 4-5 ברמות פיזה.

תלמידים ברמה זו מסוגלים לפעול ביעילות עם מודלים של מצבים מוחשיים מורכבים, שעשויים לכלול אילוצים או שמחייבים להניח הנחות.

הבנת הסיטואציה בבעיה כולה דורשת התבוננות במקרים כלליים (אפשר בעזרת דוגמאות נומריות או פרשנות של שרטוט שהתלמידים בונים) – סיטואציה מורכבת (ריבוי אפשרויות שקשה לפרשן מתוך השרטוט). הסיטואציה תיחשב "קונקרטית" (רמה 4) בסעיפים 1,2 אף כי נדרשת גם פרשנות והחלטה לגבי מהות השאלה – מה המשמעות של "הוגנות" ביחס לבעלי חלקה מלבנית?

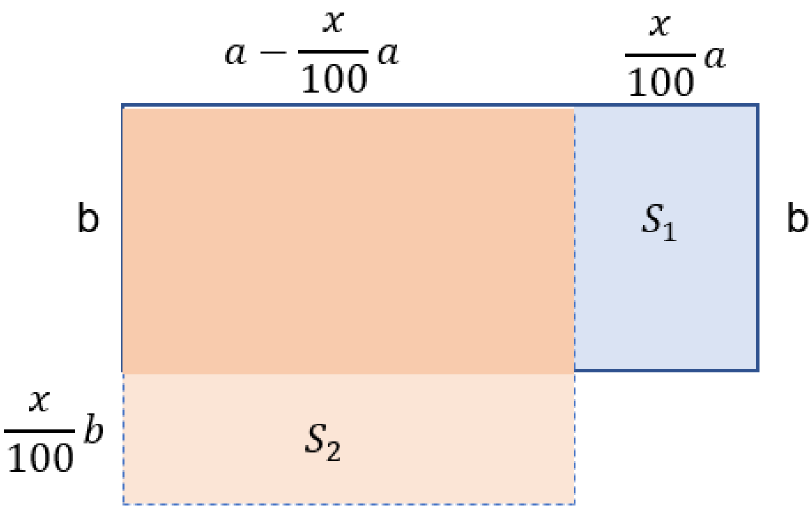
בסעיף 3 נדרשות מיומנויות אלגבריות. מתוך ההנחה כי פיתוח רעיון הממוצע ההרמוני מהווה רעיון חדש, ניתן לומר שנדרשת מיומנות ברמה 5-6 (היכולת לפרשן במדויק, תוך שימוש בייצוגים סימבוליים וגרפיים, ולבצע הכללה).גם כאן נדרשת החלטה לגבי מה רצוי לדרוש מהעירייה על מנת להגיע לשטח ריבועי.

בסעיף 2 כמו גם בסעיף 3, הערכת הפתרון עשויה לכלול הנמקה של הקשר בין השטח הנוסף לשטח הנגרע, ולגבי הקשר של שטחים אלו לשטח הריבוע. מתוך כך, נוכל לומר כי הערכת הפתרון, והרפלקציה על דרך הפתרון דורשות מיומנויות ברמה 6 על פי רמות פיזה.

רעיונות נבחרים לפתרון

1. תחילה יש לתת את הדעת לשאלה מה נחשב כאן לשינוי הוגן. יש לשער שרוב התלמידים יתמקדו בשטח החלקה – האם הוא גדל, קטן או נותר ללא שינוי – אך הבעיה פתוחה גם לשיקולים נוספים, כגון היקף (הצורך לשנות את אורך הגדר סביב החלקה). בהנחה כי השטח הוא זה שחשוב לבעלי הקרקע, מסתבר שהשינוי איננו "הוגן". נוכל להבין זאת בדרכים שונות.

אם נשווה את השטח שמתווסף ואת השטח שנגרע, נראה שהשטח הנגרע לעולם גדול מן השטח הנוסף:



בהנחה כי צלעות החלקה מלבנית המקורית הן a ו- b, ו-x מייצג את האחוז שהעירייה מבקשת לערב בתהליך, נוכל לראות כי:

$$S_1=\frac{x}{100}ab$$

$$S_2=\frac{x}{100}b\cdot a\left(1-\frac{x}{100}\right)=\frac{x}{100}ab\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)=S_1\cdot\left(1-\frac{x}{100}\right)<S_1$$

בדרך נוספת, הנשענת על חשיבה כפלית, שטח המלבן המתקבל יהיה:

$$\left(a-\frac{x}{100}a\right)\cdot\left(b+\frac{x}{100}b\right)=ab\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)=ab\left(1-\frac{x^2}{10000}\right)<ab$$

* יתכן שתלמידים יבקשו תחילה לבחון תובנות כלליות אלו באמצעות מספר דוגמאות מספריות.

2. תשובה אפשרית של תלמידים לסעיף הראשון יכולה להיות כי "ההצעה אינה הוגנת, שכן מורידים אחוז מהצלע הארוכה, וזה יותר מאשר אם מוסיפים את אותו אחוז מצלע קצרה יותר". שיקול זה, שנשמע על פניו הגיוני, מתברר כשגוי בסעיף ב'. השטח המתקבל יהיה זהה, ללא קשר לצלע המלבן אליה הוסיפו או ממנה גרעו. את זה אפשר לנמק בדרכים מגוונות. למשל, בשיקולים בסעיף הקודם לא היה שימוש בהנחה a>b, ולכן הנימוק תקף גם כאשר a<b. כמו כן, אפשר לראות שהייצוג האלגברי של השטח המתקבל, שהוא הפעם $\left(a+\frac{x}{100}a\right)\cdot\left(b-\frac{x}{100}b\right)$ נותר, בגלל חוק החילוף והקיבוץ בכפל: $ab\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1+\frac{x}{100}\right)$.
תובנה זו ברורה כאשר חושבים על "הגדלה ב- x אחוזים" כעל פעולת כפל ב- $1+\frac{x}{100}$, ועל הקטנה ב- x אחוזים כעל כפל ב- $1-\frac{x}{100}$.

3. על מנת להגיע לריבוע, צלעות המלבן המתקבל צריכות להיות שוות זו לזו, מה שנותן לנו אפשרות לבטא את האחוז x באמצעות צלעות המלבן המקורי, ולמצוא את שטח הריבוע:

$$\left(a-\frac{x}{100}a\right)=\left(b+\frac{x}{100}b\right) \qquad 100a-xa=100b+xb \qquad x(a+b)=100(a-b)$$

4. $$\frac{x}{100}=\frac{a-b}{a+b} \qquad S=ab\left(1-\frac{x^2}{10000}\right)=ab\left(1-\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2\right)=\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$$

ולפיכך צלע הריבוע תהייה הממוצע ההרמוני של צלעות המלבן: $\frac{2ab}{a+b}$.

ממוצע הרמוני והקשר לממוצעים אחרים

(מתוך ויקיפדיה, בקישור **https://en.wikipedia.org/wiki/Wikipedia:Copyrights**)

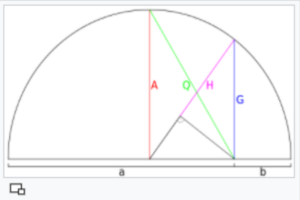
הממוצע ההרמוני הוא אחד משלושת הממוצעים הפיתגוריים. עבור קבוצות מספרים שמכילות לפחות 2 איברים שונים, הממוצע ההרמוני הוא הקטן ביותר מבין השלושה (בעוד שהממוצע החשבוני הוא הגדול ביותר והממוצע ההנדסי נמצא ביניהם). אם הקבוצה מכילה רק איברים זהים (למשל {2,2,2}), אזי שלושת הממוצעים יהיו שווים (במקרה של הדוגמה לעיל, ל-2).

הממוצע ההרמוני הוא המקרה הפרטי M_{-1} של ממוצע חזקה.

מאחר שממוצע הרמוני של קבוצת מספרים נוטה לעבר המספר הקטן ביותר שבה, הוא נוטה למזער את ההשפעה של מספרים גדולים ולהגדיל את ההשפעה של מספרים קטנים.

לעיתים משתמשים בטעות בממוצע חשבוני במקום שבו צריך להשתמש בממוצע הרמוני.[1] בדוגמת המהירויות המופיעה בהמשך, הממוצע החשבוני 50 הוא שגוי וגדול מדי.

בנייה



גאומטרית של ממוצעים נפוצים (עבור 2 ערכים בלבד):
עבור שני קטעים a ו-b, בונים חצי מעגל שקוטרו הוא הקטע הבנוי משני קטעים אלה (a+b).

- **הממוצע אריתמתי** של אורכי הקטעים a ו-b הוא אורכו של רדיוס המעגל (הקטע A).
- **הממוצע ההנדסי** הוא אורכו של האנך לקוטר ממפגש הקטעים a ו-b עד שפת המעגל (הקטע G).
- **הממוצע ההרמוני** הוא אורכו של היטל הקטע G על רדיוס המעגל (הרדיוס הנוצר בין חיתוך הקטע G עם שפת המעגל ומרכזו) (הקטע H).

ממוצעים אלו נקראים בהכללה "הממוצעים הפיתגוריים".

- **שורש ממוצע הריבועים** הוא אורכו של האלכסון הגדול בין הקטעים A ו-G (הקטע Q).

ממוצע הרמוני של 2 מספרים [עריכת קוד מקור | עריכה]

עבור המקרה הפרטי של שני מספרים x_1 ו-x_2, הממוצע ההרמוני שווה ל-

$$H=\frac{2x_1x_2}{x_1+x_2}$$

במקרה זה, הממוצע ההרמוני קשור לממוצע החשבוני $A=(x_1+x_2)/2$ ולממוצע ההנדסי, $G=\sqrt{x_1x_2}$ על ידי הקשר

$$H=\frac{G^2}{A}$$

מכאן נובע ש- $G=\sqrt{AH}$. כלומר, הממוצע ההנדסי של 2 מספרים שווה לממוצע ההנדסי של הממוצע ההרמוני והממוצע החשבוני.