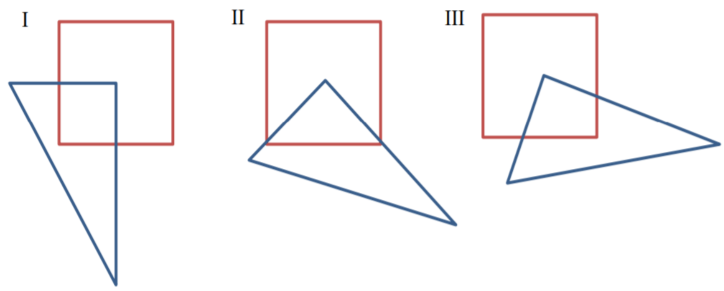
בעיית שלושת הריבועים

הבעיה

נתונים 3 ריבועים זהים ושלושה משולשים ישרי זווית זהים מונחים עליהם, כך שקודקודי הזוויות הישרות נמצאים במרכזי הריבועים.

סדרו את השרטוטים לפי גודל השטח המשותף לריבוע ולמשולש



נמקו את הסידור שלכם!

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

תוכן עניינים

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

רקע לבעיה

הבעיה מבוססת על משימה לחקר שיעור (Lesson Study) שנכתבה במחלקה להוראת המדעים, צולמה ומופיעה באתר עדש"ה.

הבעיה עוסקת בשטח שנתחם בתוך ריבוע בין שוקיים של זווית ישרה אשר קודקודה מונח במרכז הריבוע (כלומר מפגש האלכסונים).

הדינאמיות של סיבוב המשולש יוצרת מצבים שונים, ומאפשרת חקר של השטח הנוצר בכל מצב.

הבעיה מספקת אפשרות לראות משפחה אינסופית של מרובעים שווי שטח שאינם חופפים, ומזמנת הוכחה של שוויון השטחים.

למי הבעיה מיועדת: לתלמידי כיתה ח' מצוינות או ט' (מצוינות או הקבצה א').

ידע נדרש: תכונות של ריבוע, חפיפת משולשים, חישובי שטחים.

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים: רמה 4. הסיטואציה מפורשת, אך תלמידים נדרשים לתת משמעות מדויקת מביטוי "מרכז הריבוע", למשל מפגש האלכסונים.

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישום: רמה 4. רצף הפעולות שהתלמידים אמורים לבצע (בניות עזר, חפיפת משולשים, וכיו"ב) מוכרות, אך רצף הפעלתן איננו מפורש בבעיה, והם צריכים להשתמש בהן בגמישות כדי לפתח תובנות ולהסיק מסקנות.

הערכת הפתרון: רמה 5. נדרשת יכולת לבחון את פעולותיהם בגמישות ולהסביר את פרשנויותיהם ואת תהליך הסקת המסקנות שלהם.

המלצות הפעלה

- ניתן להפעיל את הבעיה בהקשר של תכונות ריבוע וחפיפת משולשים.
- שני המצבים הראשונים ברורים וקלים להוכחה שהשטחים מהווים רבע משטח הריבוע הגדול.
- הדיון במצב השלישי יכול להיעשות בזוגות, תוך הצגת נימוקים שונים, פורמליים (חפיפת משולשים) או אינטואיטיביים יותר (הארכת הניצבים של המשולש והפעלה של שיקולי סימטריה סיבובית).

רמזים אפשריים

ניתן להשתמש ביישומון הבא:

https://www.geogebra.org/m/cpc924nr

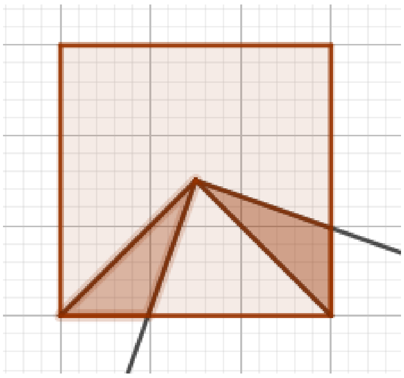
יישומון זה ממחיש את ההשתנות של המצבים האפשריים באופן דינאמי, ומרמז על אסטרטגיית פתרון.

מתוך בניית המצבים ניתן לזהות משולשים ישרי זווית חופפים, שמתקבלים ע"י סיבוב. היישומון ממחיש זאת. השטח שנגרע בצד אחד ע"י הסיבוב, מתווסף בצד השני. לכן כל שלושת השטחים שווים. לתלמידים נותר להוכיח את חפיפת המשולש שנגרע והמשולש שמתווסף.

רעיונות נבחרים לפתרון

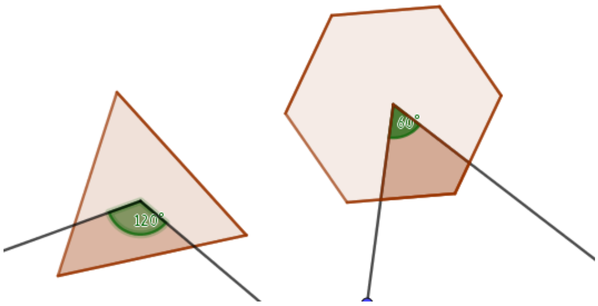
השרטוט הבא מדגים את המשולשים החופפים הנוצרים תוך כדי סיבוב המשולש (סרטוט **III**), פעם ביחס לסרטוט **I** ופעם ביחס לסרטוט **II**

1. בהשוואה לסרטוט I: דרך התבוננות במרובע הנתחם תוך כדי סיבוב הזווית ביחס לריבוע: כל אחת מהשוקיים של הזווית הישרה נמצאת בהכרח ברבעון אחר של הריבוע. אינטואיטיבית, ניתן לראות שסיבוב ב- 90 מעלות סביב קודקוד הזווית הישרה יעביר את "חלק א" האחד ל- "חלק א" האחר, וכך גם לגבי חלק ב. את האינטואיציה הזאת אפשר לתרגם להוכחה על ידי חפיפת שני המשולשים המסומנים כ"חלק ב" (זצ"ז). כאן נכנסת ההנחה לגבי המשמעות של "מרכז הריבוע", למשל מפגש שני הישרים שכל אחד מהם מחלק את הריבוע לשני מלבנים חופפים. כעת קל לראות שה- "סתם מרובע" הנתחם על ידי הזווית הישרה מורכב מחלק א' ומחלק ב' שביחד משלימים לרבעון שלם, ולכן שטחו הוא רבע שטח הריבוע.
2. בהשוואה לסרטוט II: הרעיון דומה, אלא שהפעם חפיפת המושלש הנגרע והמשולש המתווסף מבוססת על משפט חפיפה זצ"ז, כאשר בכל אחד מהמשולשים יש זווית בת 45 מעלות, וצלע השווה למחצית אלכסון הריבוע.

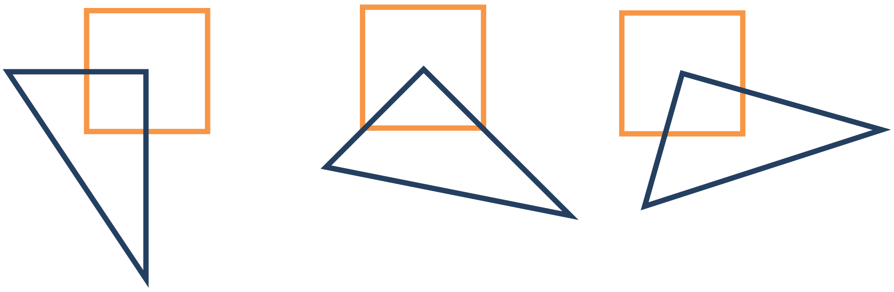


שאלות לדיון

- ניתן לשאול על תכונות המרובע שמתקבל (2 צלעות סמוכות שוות ו-2 זווית נגדיות ישרות)
- ניתן להכליל את הבעיה, לשאול: האם יש צורות נוספות, חוץ מריבוע, שגם עליהן נוכל לקבל רצף של צורות שוות בשטחן תוך סיבוב זווית מעליהן? או שאלה דומה, אך בצורה אחרת: מה המיוחד בריבוע ובזווית הישרה שמאפשר את קבלת הרצף הזה? כמובן שאפשר לענות על כך בכמה דרכים. התכונה הבסיסית של ריבוע שעונה על כך היא שריבוע הוא צורה שאם נסובב אותה סביב מרכזה ב-90 מעלות אז הריבוע המסובב יתלכד במדויק עם הריבוע המקורי. זוהי תכונה "חזקה" ! מרובע שאינו ריבוע לא יקיים אותה. מה שחשוב לשים לב הוא שתכונה זו מספיקה לגמרי כדי לקיים את "ההסבר" שנתנו קודם. מכאן שאפשר לבנות מצבים דומים עם כל מצולע משוכלל ועם זווית מתאימה, למשל שסיבוב של זווית בת 60 מעלות במשושה משוכלל, או סיבוב של זווית בת 120 מעלות סביב מפגש התיכונים של משולש שווה צלעות.



- בעיית קיפולי נייר באתר מכון ויצמן https://www.youtube.com/watch?v=HBdEZNnQwjA
- שאלה מתוך אתר עדשה:
צבעו בעפרון השטח המשותף בין המשולש ישר הזווית והרבוע בכל אחד מהשרטוטים הנתונים (קודקוד הזווית הישרה למשולש מונח על מפגש האלכסונים).



סדרו את הצורות הצבועות לפי היקפן מן הקטן ביותר עד ההיקף הגדול ביותר. נמקו.

במבט לאחור (לתלמידים)

כדאי לבקש מכל תלמיד/ה לכתוב רפלקציה על תהליך העבודה:

- באילו אסטרטגיות השתמשתם לפתרון הבעיה?
- מה למדתם במהלך פתרון הבעיה? (למשל ציינו רעיון חדש, או דרך עבודה מעניינת ויעילה?)
- מה הביא לפריצת הפתרון וההנמקות בסעיפים 1,2, ומה סייע בסעיפים 3,4?