

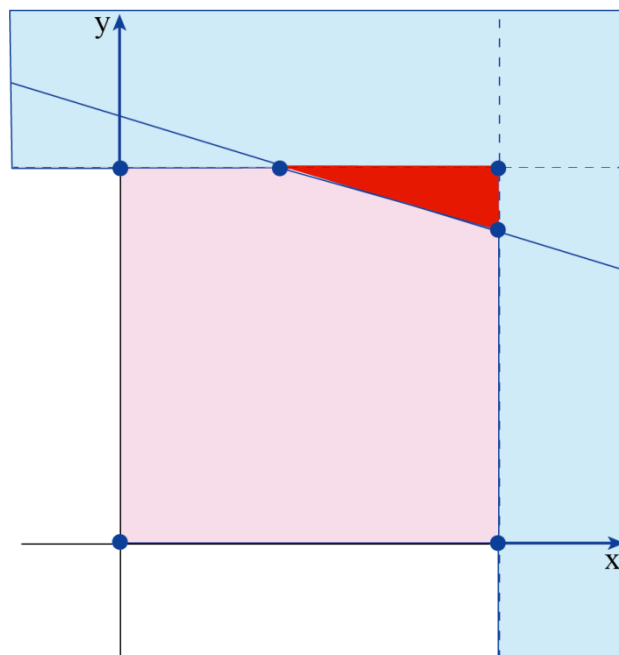


הבעיה

- בשליש האחרון בכיתה ט' יתקיימו 3 בחנים ושני מבחנים בסדר הבא:
- בוחן, מבחן, בוחן, בוחן, מבחן.
- משקל של כל בוחן בציון כולו הוא 12%, משקלי המבחנים הם 24% במבחן הראשון ו- 40% במבחן השני. חיים קיבל ציון 80 בבוחן הראשון ו-60 במבחן הראשון.
- האם חיים יכול במצבו העכשווי להגיע לציון שלישי 85? נמקו.
 - אם חיים יחליט להסתפק בציון שלישי עובר (55), האם הוא יוכל להעדר מהמבחן השני (במקרה כזה לקבל עליו 0 נקודות בשקלול הכללי)? נמקו תשובתכם והדגימו באמצעות אפשרויות לציוני הבחנים שנתרו.
 - כדי להתקבל להקבצה ברמה גבוהה בתיכון, צריכים התלמידים לקבל ציון שלישי משוקלל של 80 לפחות. חיים, שמעוניין להתקבל לרמה הגבוהה, השקיע וקיבל 100 בבוחן השני. הציעו אפשרויות שונות לציונים שחיים עשוי לקבל במבחן השני ובבוחן שנתר, כולל מקרים כאלה שבהם יתקבל להקבצה (ציון 80 ומעלה) וכאלה בהם לא יתקבל (ציון מתחת ל-80).

ציון שלישי	מבחן	בוחן
מתחת ל-80 (כמה?)		
מתחת ל-80 (כמה?)		
מעל 80 (כמה?)		
מעל 80 (כמה?)		

- האם חיים יכול לקבל ציון סופי 80 בדיוק? אם לא- נמקו, אם כן, הדגימו!
- בגרף העיוור הבא (ללא ציון ערכים מספריים) מתוארות האפשרויות של חיים לציונים במבחן ובבוחן שנתרו.
- ציר X מייצג את ציון הבוחן השלישי, ציר y מייצג את ציון המבחן השני.
- נסו להסביר מה מתאר התחום המשורטט ע"י הצירים ושני הישרים המקבילים לצירים.
 - מה מבטאת המשוואה $36 + 0.12x + 0.4y = 80$, המתוארת ע"י הקו המשופע שבשרטוט זה?
 - מה מבטא המספר 36 במשוואה זו?
 - מה מתארים האזורים הצבועים מעל הקו המשופע ומה מתאר האזור מתחתיו? מה מייצגות הנקודות שעל הקו המשופע?



- האם מצאתם בעזרת הייצוג הגרפי של הבעיה אפשרויות נוספות כתשובות לשאלה 3? האם תוכלו לתת כעת תשובה כללית? נמקו תשובתכם!



תוכן עניינים

1	הבעיה
4	רקע לבעיה
4	ניתוח מיומנויות נדרשות
4	המלצות הפעלה
5	רמזים אפשריים
5	רעיונות נבחרים לפתרון
6	שאלות לדיון
6	במבט לאחור (לתלמידים)

רקע לבעיה

הבעיה הינה "היפוך" של בעיה פשוטה העוסקת בממוצעים משוקללים. במקום לחשב ממוצע מתוך ציונים נתונים, תלמידים מתבקשים להציע ציונים אופציונליים כדי לתכנן הגעה לממוצע מסוים. במהלך עיבוד הבעיה זוהה הפוטנציאל שבשילוב של ייצוג גרפי ומציאת אפשרויות רבות לפתרון מתוכו. במובן הזה יש בבעיה גם רכיבים דומים לאלה שקיימים בבעיית העובדים הזוטרים והבכירים, ולכן ניתן להפעיל אותן בכיתה כיחידה רציפה, או בנפרד (פרטים בהמשך).

למי הבעיה מיועדת: לתלמידי כיתה ח' מצוינות או ט' (מצוינות או הקבצה א')

ידע נדרש: היכרות עם מושגים בסיסיים בסטטיסטיקה, כמו ממוצע וממוצע משוקלל, היכרות בסיסית עם פונקציה קווית ותיאורה הגרפי, הבנה של אי שוויונות לינאריים בייצוגים שונים עשויה להועיל בפתרון הבעיה.

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים, ובניית אסטרטגיה לפתרון סעיפים 1-2: רמה 4-5 ברמות פיזה.

תלמידים ברמה זו מסוגלים לפעול ביעילות עם מודלים של מצבים מוחשיים מורכבים, שעשויים לכלול אילוצים או שמחייבים להניח הנחות.

הבנת הסיטואציה בבעיה כולה דורשת התבוננות במקרים רבים (אפשר בעזרת דוגמאות נומריות או פרשנות של הגרף) – סיטואציה מורכבת (ריבוי אפשרויות שקשה לפרשן מתוך השרטוט). הסיטואציה תיחשב "קונקרטי" (רמה 4) בסעיפים 1,2 ובהמשך נדרשות הנחות לגבי מהות השאלה – מה המשמעות של "היכן ימצא" בגרף? בסעיפים 3,4 נדרשות מיומנויות ברמה 5 (סעיף 4 ברמה 5, לגבי סעיף 3- הדבר תלוי בידע של הלומד, עד כמה הרעיון חדש, ואז אפשר לומר שנדרשת מיומנות ברמה 5-6 (היכולת לפרשן במדויק, תוך שימוש בייצוגים סימבוליים וגרפיים, ולבצע הכללה.

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה: רמה 5 ברמות פיזה

ההנחה היא שיישום כולל דוגמאות רבות והכללתן, גם אם אין אסטרטגיה ברורה למצות את האפשרויות.

הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך: רמה 6 ברמות פיזה

הערכת הפתרון עשויה לכלול הנמקה של הקשר לגרף, כמו כן, תלמידים יידרשו להעריך את הטעויות של עמיתיהם. תלמידים בדרך כלל לא פוגשים בעיות מסוג זה, בהן נוצר קשר בין ייצוגים ונושאים שונים.

המלצות הפעלה

- תחילה כדאי לברר שהתלמידים יודעים מהו ממוצע משוקלל וכיצד הוא מחושב.
- ניתן להפעיל את הבעיה עם סעיפים 1,2 בלבד, לקיים דיון מליאה סביב התשובות השונות לגבי שקלול הממוצע, ואז לאפשר לתלמידים שקשה להם לפרש את הייצוג הגרפי, להתחיל עם סעיף 3, לחשוב באופן מספרי, בדרך של ניסוי וטעייה, על הצעות שונות לציונים אפשריים, ודרך ההצעות האלה להבין ולהכליל את האפשרויות השונות (מה שיאפשר בהמשך דיון עשיר יותר במליאה), ורק אז לנסות לגשת לייצוג הגרפי ולפרש אותו.
- בסעיף 3 אפשר לבקש למלא את הטבלה בזוגות, ובהמשך לאסוף מכל הכיתה את ההצעות, אפשר גם דרך קובץ שיתופי, ודרך עושר הדוגמאות לקיים דיון מליאה בניסיון להגיע להכללה ולפתרון סעיף 4.

- הפעלת הבעיה בשלב ראשון כעבודה עצמית (בבית / בכיתה על פי מגבלות הזמן) ואח"כ לשתף הצעות ולשאול תלמידים שונים באילו אסטרטגיות פעלו, ומה התגלה ומדוע? ממה היה קל יותר להתחיל? כיצד הגיעו למסקנות? ומה קושר בין כל המקרים האלה?

ניתן להפעיל לאחר הבעיה הזו את הבעיה "עובדים זוטרים ובכירים", שגם בה ישנם תחומים הנוצרים ע"י אילוצים, שניתנים לתרגום לאי שוויונות לינאריים. אפשר גם להפריד לגמרי בין שתי הבעיות, אולם אם יוצרים מהן יחידה אחת, כדאי לשים לב שבבעיה הזו האילוצים פשוטים יותר, מכיוון שהתחום נוצר ע"י ישרים המקבילים לצירים, ולכן כדאי להתחיל איתה.

רמזים אפשריים

למתקשים בסעיפים 1,2 ניתן להציע לבחון מקרים פרטיים, ולשאול אילו מקרים פרטיים כדאי לבדוק לדעתם (הכוונה לאפשר להם לחשוב על הציון המשוקלל המירבי, המתקבל כאשר כל ציוני הביניים נהם 100). תלמידים המתקשים בסעיף 4 ניתן להפנות תחילה לטבלה בסעיף 3, כך יוכלו להגיע לאפשרויות שונות בדרך של ניסוי וטעיה (שבעצם הופכים את כיוון השאלה - חישוב ממוצע משוקלל מתוך ציונים נתונים). תלמידים אלה יוכלו לתרום ולהיתרם מהדיון במליאה בעקבות ההצעות השונות, וכך להגיע לייצוג הגרפי יותר בשלים. לגבי סעיף 4, העוסק בייצוג הגרפי: ניתן לשאול את התלמידים מהן משוואות הישרים המקבילים לצירים שיוצרים קטעים של 100 יחידות (שהם בעצם גבולות האי שוויונות), ואז לחקור את האילוצים היוצרים את התחום המשורטט ומשמעותם מבחינת סיפור הבעיה. משוואת הישר המשופע נתונה, וניתן לבקש מהתלמידים לחשוב מה מבטא כל חלק במשוואה, כולל המקדמים והאיבר החופשי, ואיך החלקים האלה נובעים מהסיפור עצמו. בנוסף, אפשר לבקש מהתלמידים לסמן כמה נקודות על הישר המשופע, ולהסביר מה הן מתארות מבחינת הבעיה. המספר 36 מבטא את חלק הציון המשוקלל שכבר השיג חיים במבחן הראשון ושני הבחנים. כדאי לשים לב שכדי לתת משמעות למשוואה בהקשר לסיטואציה, היא נתונה בהצגה "סתומה" ולא מפורשת. ניתן להציע להם לבדוד את y כדי לקבל ייצוג מוכר יותר.

רעיונות נבחרים לפתרון

1. חיים יכול להגיע לציון משוקלל מירבי של 88: אם יקבל 100 בבחנים הבאים ובמבחן השני, הציון המשוקלל יהיה: $88 = 80 * 0.4 + 200 * 0.12 + 60 * 0.24 + 80 * 0.12$
2. אם חיים יקבל 0 נקודות במבחן השני, הוא לא יוכל לקבל ציון עובר, כי הציון המשוקלל המקסימלי שלו יהיה: $88 = 80 * 0.4 + 200 * 0.12 + 60 * 0.24 + 0 * 0.12$
- סעיף 4: התחום הריבועי שבשרטוט מתאר את כל זוגות הציונים האפשריים בבוחן השלישי ובמבחן השני, ומורכב מאי השוויונות: $0 \leq y \leq 100 \leq x \leq 100$, המתארים את הציונים האפשריים. נקודות על הישר המשופע מתארות זוגות של תוצאות אפשריות בבוחן השלישי ובמבחן השני, כך שיתנו ממוצע משוקלל 80 בדיוק (המספר 36 שמחסרים מהציון המשוקלל מתקבל ע"י שקלול הציונים שכבר התקבלו, כולל הבוחן השני בציון 100). אם לא נגביל לנקודות בעלות שיעורים שלמים, אזי ישנן אינסוף אפשרויות, המתאימות לאינסוף הנקודות על קטע הישר המשופע בתוך התחום. נקודות בתחום הנמצאות מעל הישר המשופע, מתארות אפשרויות בהן הממוצע מעל 80, ונקודות מתחתיו – אפשרויות בהן הממוצע

מתחת ל-80. כמובן שחלק מהנקודות מבטאות ציונים שאינם מספרים שלמים. על התלמידים להפעיל שיקול דעת אילו מספרים עשויים להוות ציון במבחן או בבחינה (האם מורים נותנים חצאי ציון?)

אם עוסקים בשאלות ההרחבה, כדאי לשים לב שכאשר ציון היעד משתנה, משתנה רק האיבר החופשי במשוואה, ולכן הישרים ב"משפחת" הבעיות מקבילים. לשולטים בטכנולוגיה: אפשר ליצור משפחת ישרים כזאת באופן דינאמי בסביבה כגון גאוגברה או דסמוס, כאשר סרגל פרמטרי המשנה את ערך האיבר החופשי במשוואת הישר.

שאלות לדיון

דיון בבעיה יכול לעסוק בסוגיות הבאות:

- אילו ציונים בדקתם? מדוע דווקא אותם? האם בדיקות אלה מספיקות להצדיק את הטענה?
- כיצד ניגשתם לבעיה? מה היו פעולותיכם הראשונות? האם הן קידמו אתכם? אם לא, מה עשיתם אחר כך?
- באיזו מידה אתם בטוחים בטענה שניסחתם? מה יגדיל את מידת הביטחון שלכם?
- הבעיה דנה בממוצעים משוקללים ובייצוג גרפי של ישרים מסוימים ואזורים צבועים ביניהם. אילו קשרים אתם מזהים בין הייצוג הגרפי לבין הנתונים והאפשרויות שבבעיה? האם ייצוג גרפי כזה עשוי להתאים גם לסיפורים ולנושאים אחרים? אם לא- נמקו, אם כן, תנו דוגמאות.

אפשרות הרחבה ל"מיטיבי לכת": בהתייחס לסעיף 4 והייצוג הגרפי, מה יתארו ישרים אחרים הדומים לישר המשופע, בהם נשנה את האיבר החופשי? לדוגמה: $36 + 0.12x + 0.4y = 70$. נסו לשרטט שני ישרים כאלה בגרף שבשאלה והסבירו את משמעותם מבחינת סיפור הבעיה. מדוע הישרים מקבילים?

במבט לאחור (לתלמידים)

כדאי לבקש מכל תלמיד/ה לכתוב רפלקציה על תהליך העבודה:

- באילו אסטרטגיות השתמשתם לפתרון הבעיה?
- מה למדתם במהלך פתרון הבעיה? (איזה רעיון חדש, או דרך עבודה מעניינת ויעילה?)
- מה הביא לפריצת הפתרון וההנמקות בסעיפים 1,2, ומה סייע בסעיפים 3,4?