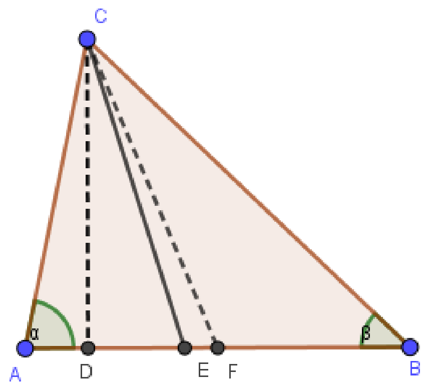
הבעיה

ידוע שבמשולש שווה שוקיים חוצה זווית הראש מתלכד עם הגובה והתיכון לבסיס, וכי לגבי זוויות אחרות במשולש שו"ש ובמשולשים אחרים התכונה הזו לא בהכרח מתקיימת.
נבחן את הקשרים בין הקטעים האלה במשולשים שונים.

1. הוכיחו שבמשולש ישר זווית מתקיים:
חוצה הזווית הישרה חוצה גם את הזווית בין הגובה והתיכון ליתר (כדי להוכיח טענה זו, שרטטו משולש כזה והעבירו בו את שלושת הקטעים מקודקוד הזווית הישרה אל היתר וכתבו בכתיב מתמטי מה נתון ומה צריך להוכיח).

2. מיכאל אמר: "אבל הטענה בסעיף א' נכונה רק למשולש ישר זווית, אז מה שזה שווה?"
אסתר אמרה: "אבל בכל זאת משהו מהתכונה נשאר נכון גם במשולשים אחרים". האם היא צודקת?
נסו לבדוק אם גם במשולשים אחרים נמצא חוצה הזווית **בין** הגובה והתיכון היוצאים מאותו קודקוד. בדקו לגבי זוויות שונות במשולשים שונים. תוכלו להיעזר בישומון.
האם תסכימו שהתכונה שגיליתם בעזרת הישומון חזקה ו"שווה הוכחה"?
אז בואו נראה מדוע תופעה זו קיימת: נסו להוכיח תכונה זו, או חלק ממנה, ואח"כ קראו את ההוכחה בסעיף 3 ונסו להשיב לשאלות בסוגריים. התשובות ישלימו את שלבי ההוכחה.

3. אם המשולש ABC אינו שווה שוקיים, הרי שאחת מהצלעות AC ו- BC קצרה מהשנייה. בלי לפגוע בכלליות ההוכחה נניח ש- AC<CB. נבדוק את המיקומים של התיכון וחוצה הזווית היוצאים מקודקוד C.



בשרטוט, AF = FB
שטחי המשולשים ACF ו- CFB שווים (מדוע?)
נסמן ב- E את נקודת המפגש של חוצה הזווית ACB עם הצלע BA.

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

נבטא את היחס בין שטחי המשולשים ACE ו-CEB בשני אופנים: מצד אחד יחסם כמו היחס בין AE ל- EB (מדוע?), ומצד שני יחסם כמו היחס בין הצלעות AC ו- AB (שרטטו את האנכים מנקודה ***E*** לצלעות **CB ,AC**, וקראו את המשך ההוכחה).

מכיוון שהאנכים לצלעות AC ו- CB מהנקודה E שווים (מדוע?), היחס בין שטחי המשולשים הנ"ל נקבע על פי היחס בין הצלעות, כי הגבהים לצלעות אלה שווים.

הנחנו כי $CB > AC$, לכן מתקיים: $S_{ACE} < S_{CEB}$, ולכן הנקודה E תימצא על הקטע AF, כלומר קרובה יותר לצלע הקצר (AC) מאשר לצלע הארוכה (BC).

הסבירו מה הטענה אותה הוכחנו, והאם מיצינו את כל האפשרויות.

- האם התכונה הזו תתקיים גם במשולש קהה זווית? בדקו ונמקו.
- האם הגובה נמצא תמיד מהצד השני של חוצה הזווית? מדוע?

תוכן עניינים

כיצד נוצרה הבעיה?

בשאלה לגבי משולש ישר זווית, בה נדרשים חישובים גיאומטריים של זוויות, זיהינו את הרעיון המתמטי: 'חוצה הזווית הישרה במשולש ישר זווית חוצה גם את הזווית בין התיכון והגובה ליתר' .

בעקבות כך, שאלנו: מה מהרעיון הזה נותר במעבר למשולש כללי? מסתבר שחקר השאלה מביא לרעיון המתמטי: 'בכל משולש, חוצה של זווית במשולש נמצא בין הגובה והתיכון היוצאים מאותו הקודקוד'. כמו כן, 'האורך של חוצה זווית במשולש קטן מאורך התיכון וגדול מאורך הגובה היוצאים מאותו קודקוד'.

בחרנו לפתוח את הבעיה בזיהוי מיקומו היחסי של חוצה הזווית הישרה במשולש ישר זווית ביחס לגובה ולתיכון היוצאים מקודקוד הזווית הישרה ובהוכחת הטענה: 'בכל משולש ישר זווית, חוצה הזווית הישרה חוצה גם את הזווית בין הגובה והתיכון היוצאים אל היתר. בהמשך עוברים למקרה של משולש כללי, וחוקרים מה מתכונה זו מתקיים בו. מסתבר שבכל משולש נמצא חוצה הזווית בין הגובה והתיכון היוצאים מאותו קודקוד, אבל לא בהכרח חוצה את הזווית ביניהם. תכונה זו מעניינת בפני עצמה, וגם מפתיעה!

שני הרעיונות המתמטיים בוחנים הרחבה של המשפט: במשולש שו"ש, חוצה זווית הראש מתלכד עם הגובה והתיכון לבסיס.

למי הבעיה מיועדת: לתלמידי כיתה ח' מצוינות חזקים במיוחד, או ט' (מצוינות או הקבצה א'), עדיף ט', עקב הצורך בבשלות דדוקטיבית.

ידע נדרש: היכרות עם התכונות של שלושת הקטעים המיוחדים במשולש (חוצה הזווית, הגובה והתיכון), תכונות בסיסיות של משולש שו"ש, שטחי משולשים, חפיפה, ואי שוויונות הקשורים בצלעות וזוויות במשולשים.

ניתוח מיומנויות נדרשות:

הבנת הבעיה והנתונים, ובניית מודל שלה: רמה 5 ברמות פיזה.

סעיף 1 (המקרה של משולש ישר זווית) דורש תרגום של נתונים מילוליים לסרטוט.

הבנת הסיטואציה בסעיף 2 דורשת סרטוט של מקרים רבים (אפשר בעזרת גאומטריה דינאמית) – סיטואציה מורכבת (ריבוי אפשרויות שקשה למצות בסרטוט). הסיטואציה תיחשב "קונקרטית" (רמה 4) אם סופקה לתלמידים סקיצה דינמית (יישומון).

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה: רמה 5 ברמות פיזה (סעיף 3)

ההנחה היא שיישום כולל ניסוח טענה (היכן יימצא), לאו דווקא עם הוכחה (מלאה) לטענה. אין אסטרטגיה ברורה למצות את האפשרויות. חלק מההוכחה כתוב, ונדרשת בשלות לקריאת הטקסט, הבנתו והשלמת החלקים החסרים בהנמקות.

הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך: רמה 6 ברמות פיזה

הערכת הפתרון עשויה לכלול הוכחה מלאה של הטענה, או לפחות נימוק מתמטי. כמו כן, תלמידים יידרשו להעריך את הטיעונים של עמיתיהם. תלמידים בדרך כלל לא פוגשים בעיות הוכחה מסוג זה. נדרש תחכום ודיוק, בדיקה של מיצוי האפשרויות.

התכנים נוצרו על ידי מכון ויצמן למדע במימון קרן טראמפ.

המלצות הפעלה

- ניתן להפעיל את הבעיה עם סעיף 1 בלבד, או להתחיל בסעיף 2, בו נדרש חקר והנמקה, או להפעיל אותה ברצף המוצע פה.
- בסעיף 1 נדרש להציע שרטוט, ואז סימון הזוויות והקשרים ביניהן מאפשר לייצר הוכחה.
- בסעיף 2 ניתן לבדוק תחילה מקרים פרטיים בסרטוט סטטי, להתחיל לפתח השערה, ואז להסתייע בישומון הדינאמי. כדאי להדגיש שהבדיקה של שלושת הקטעים נעשית בזוגות: תיכון מול חוצה הזוית, גובה מול חוצה הזווית וכך בהוכחה.

היישומון.

משולש כללי ובו משורטטים חוצה זווית, גובה ותיכון מקודקוד הזווית.

ניתן לשנות בו את המיקום של כל קודקוד במשולש ובעקבות כל שינוי, ישתנו המיקומים של שלושת הקטעים במשולש.

אפשר להציע שימוש ביישומון, או לבנות כדוגמתו, כדי לחקור משולשים רבים ושונים, לאחר התנסות בדוגמאות פרטיות. מתוך היישומון ניתן לפתח השערה, לפיה חוצה הזווית נמצא תמיד בין הגובה לתיכון, היוצאים מאותו קודקוד. מתוך צפייה במקרים רבים בהרצת היישומון, מתבקש להסיק שהגובה נמשך תמיד לצלע הקצרה יותר, והתיכון – לצלע הארוכה מבין השתיים הכולאות את הזווית, חוצה הזווית יהיה ביניהם.

- כדאי להפעיל את הבעיה אחרי לימוד התכונה של חוצה זווית כמקום גיאומטרי, לפיה כל נקודה על חוצה זווית נמצאת במרחק שווה משוקי הזווית. אפשר גם להסיק תכונה זו תוך כדי בניית ההוכחה עפ"י חפיפת משולשים היכרות עם משפט חוצה הזווית - התכונה שחוצה זווית במשולש מחלק את הצלע מול הזווית באותו היחס כמו יחס אורכי הצלעות שהן שוקי הזווית - יכולה לקצר את ההוכחה, אך איננה הכרחית להבנתה.

- אפשר להפעיל את הבעיה בשלב ראשון כעבודה עצמית (בבית/בכיתה על פי מגבלות הזמן) ואח"כ דיון עם תלמידים שונים באילו אסטרטגיות פעלו, אילו משולשים נבדקו ומה התגלה ומדוע? ממה היה קל יותר להתחיל? כיצד הגיעו למסקנות? מה נחשב כנימוק מספק ומה רק בגדר השערה? מה קושר בין כל המקרים?

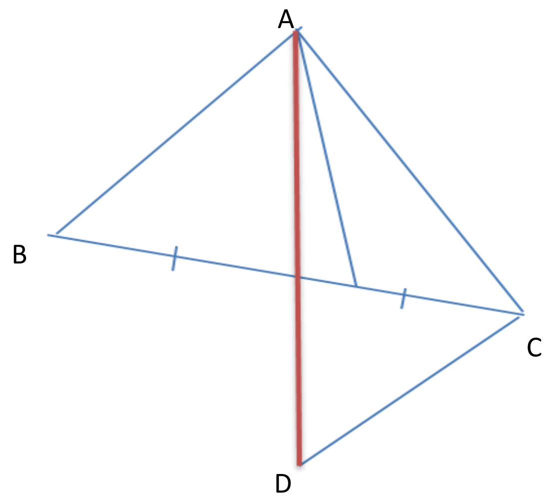
- לקריאת הטקסט של ההוכחה יש מטרה נוספת: פיתוח המיומנות של קריאת טקסטים ופרשנות הנובעת ממנה. מומלץ לעשות זאת בזוגות, משום שהקריאה מייצרת דיון, שאלות, ומחשבות שכדאי לחלוק.

- אפשר גם להציג את הבעיה לכיתה באופן פתוח, ללא הוכחה כלל, לבקש מהם לנסות לייצר הוכחות שונות, ולהציגן במליאה. ההחלטה תלויה בבשלות התלמידים מבחינת החשיבה הדדוקטיבית שלהם.

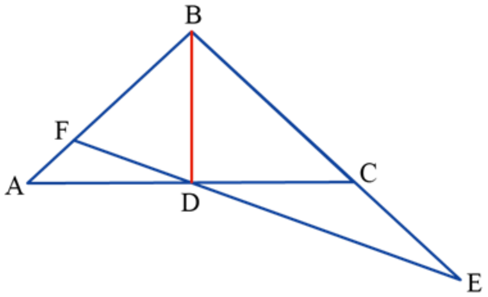
רמזים אפשריים

- לגבי סעיף 1, לאחר שרטוט המשולש עם הקטעים המיוחדים מקודקוד הזווית הישרה, אפשר להציע לתלמידים שלא מוצאים קצה חוט, לסמן את אחת הזוויות החדות של המשולש ישר הזווית כ-α ולהביע בעזרתה את הזוויות הנותרות, עפ"י תכונות המשולש וחוצה הזווית הישרה והתיכון היוצא מקודקוד הזוית הישרה.
- בטקסט בסעיף 3 נדרשת פרשנות מונחית של הקוראים. אפשר לפרק את ההוכחה לשני חלקים: האחד (הפשוט יותר), העובדה שהגובה "נמשך" לצלע הקצרה, והוא הקו הקצר ביותר המחבר את הקודקוד עם הצלע שממולו (ובכל משולש ישר זווית שהוא יוצר, היתר יהיה ארוך יותר) והחלק השני: העובדה שהתיכון קרוב יותר מחוצה הזווית לצלע הארוכה מבין השתיים שיוצאות מאותו הקודקוד.
- במקרה של קושי בסעיף 3 במעבר מזיהוי התכונה להוכחתה, אפשר לתת רמזים, כמו: נסו להסביר מדוע הגובה קרוב יותר מחוצה הזווית לצלע הקצרה יותר מבין השתיים, ומדוע התיכון קרוב יותר לצלע הארוכה.
ל"מיטיבי לכת": אם עולים ספקות לגבי מיקום חוצה הזווית ביחס לתיכון, גם הוכחה בדרך השלילה עשויה להוביל לנימוק. במקרה זה נשרטט את "חוצה הזווית" AK קרוב יותר לצלע הארוכהAC ובאמצעותו נוכיח שהמצב בלתי אפשרי .

- עוד ל"מיטיבי לכת": אפשר גם להציע בניות עזר, למשל: הארכת התיכון AM (האדום) כאורכו, כדוגמת השרטוט הבא, שרטוט חוצה הזווית דווקא קרוב יותר לצלע הארוכה, ושוב הוכחה שהמצב הזה בלתי אפשרי. ע"י הארכת התיכון כאורכו נוצרת מקבילית ACDB (מרובע שאלכסוניו חוצים זה את זה).
באמצעות הבניות האלה ניתן להגיע לסתירה הנוצרת מבדיקת גדלים של צלעות וזוויות. אם הזווית CAK היא מחצית הזווית BAC, אז הזווית CAD היא גדולה ממנה, ולכן גם תהיה גדולה מהזווית CDA, ולכן הצלע DC במשולש ACD אמורה להיות גדולה מהצלע AC, אבל CD = AB, כך נוצרת סתירה לטענה ש-AB < AC.



רעיונות נבחרים לפתרון

- 

נתאר בקווים כלליים הוכחה אפשרית נוספת לסעיף ג', באשר למיקום חוצה הזווית ביחס לתיכון.

בהינתן משולש EBF שבו BF<BE, ו- BD חוצה <EBF. נבנה משולש שווה שוקיים ABC שבו BD הוא חוצה זווית הראש (ראו סרטוט).

מתקיים $S_{BDA} = S_{BDC}$

לכן, $S_{BDF} < S_{BDA}$ ו $S_{BDE} > S_{BDC}$

לכן, $DF < DE$, כי יחס שטחי המשולשים המתאימים שצלעם המשותפת BD הוא כיחס הצלעות המתאימות.

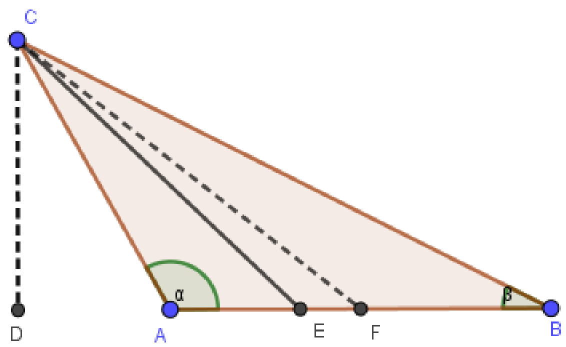
התיכון לצלע EF מחלק את המשולש BEF לשני משולשים שווי שטח, לכן נקודת המפגש של התיכון עם הצלע EF תימצא על הקטע ED (ולא על FD), כדי לאזן שטחים.

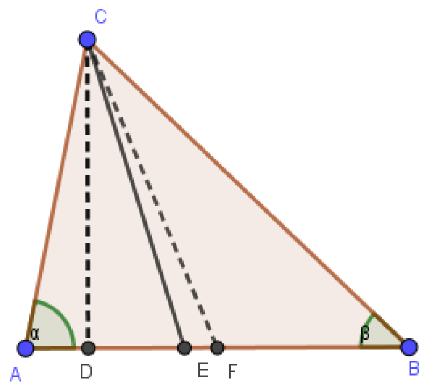
- בעזרת השרטוטים הבאים נתאר הוכחה לכך שהגובה נמצא "משמאל" לחוצה הזווית, כלומר: בצד של הצלע הקצרה יותר מבין שוקי הזווית C בשני מקרים אפשריים.

בשני השרטוטים במשולשים ABC נתון ש $CA \neq CB$, ובלי הגבלת הכלליות $CA < CB$.

CE הוא חוצה הזווית $\sphericalangle ACB$. CD ו CF הם בהתאמה הגובה והתיכון לצלע AB.

אם $\alpha \geq 90$: הגובה מתלכד עם הצלע AC או נמצא מחוץ למשולש. זהו המקרה הפשוט, שכן ברור שהגבוה נמצא "משמאל" לחוצה הזווית, אשר תמיד עובר בתוך המשולש.





ואם $\alpha < 90$, כמתואר במשולש מימין, נביע את הזויות $\sphericalangle ECA, \sphericalangle ECB$ בעזרת α, β .

מצד אחד, $\sphericalangle ACD = 90 - \alpha$

מאידך, $\sphericalangle ACE = 90 - \frac{\alpha+\beta}{2}$, וזווית זו בהכרח גדולה יותר (כי הנחנו $CA < CB$, ולכן $\alpha > \beta$)

מכאן נסיק ש - D נמצאת בין A ל E .

שאלות לדיון

הדיון בבעיה יכול לעסוק בסוגיות הבאות:

- אילו משולשים בדקתם? האם בדיקות אלה מספיקות להצדקת ההשערה?
- כיצד ניגשתם לבעיה? מה היו פעולותיכם הראשונות? האם הן קידמו אתכם? אם לא, מה עשיתם אחר כך?
- באיזו מידה אתם בטוחים בנכונות הטענה שניסחתם? מה יגדיל את מידת הביטחון שלכם?
- הבעיה דנה בטענות לגבי שלושה קטעים במשולש כללי ולגבי הזווית הישרה במשולש ישר זווית. אילו קשרים אתם מזהים בין טענות אלה למשפט אודות גובה / תיכון / חוצה זווית הראש במשולש שווה שוקיים?

אפשרות הרחבה: בבעיה שלפנינו יש התייחסות מיוחדת לחוצה הזווית, ומראים שהתיכון והגובה נמצאים בצדדים שונים שלו.

אם מתעלמים מהגובה, אז אפשר להתעמק עוד בקשר שבין חוצה הזווית והתיכון.

כשמעבירים תיכון לאחת השוקיים במשולש שו"ש, מה אפשר לומר על הזויות שנוצרות בין התיכון לשוקי הזווית אותה הוא חותך? מה אפשר לומר על הזויות הצמודות שנוצרות בין התיכון לבין צלע המשולש אותה הוא חוצה? בשני המקרים הזויות לא שוות (כי אם כן, הקודקוד ממנו יוצא התיכון היה קודקוד הראש במשולש שו"ש).

במבט לאחור (לתלמידים)

כדאי לבקש מכל תלמיד/ה לכתוב רפלקציה על תהליך העבודה:

- באילו אסטרטגיות השתמשתם לפתרון הבעיה?
- מה למדתם במהלך פתרון הבעיה? (איזה רעיון חדש, או דרך עבודה מעניינת ויעילה?)
- מה הביא לפריצת דרך בפתרון הבעיה? בהוכחה, בהנמקות?