



עובדים זוטרים וזוטרים

הבעיה

יזמים מעוניינים להקים חברה. בחברה אמורים לעבוד עובדים זוטרים ובכירים. השכר החודשי של עובד זוטר הוא 10,000 ₪ ושל עובד בכיר 25,000 ₪. היזמים מגבילים את השכר החודשי המשולם לעובדים כך שלא יעלה על 450,000 ₪. א. בחברה מעוניינים ליצור שוויון בין מספר העובדים הבכירים לזוטרים. מה מספר העובדים האפשרי בתנאים אלה?

ב. לצורך הקמת מיזם חדש נדרש כי היחס בין מספר העובדים הבכירים בחברה למספר העובדים הזוטרים יהיה גדול מ- 6:50, ללא שינוי תנאי השכר ותקציבו.

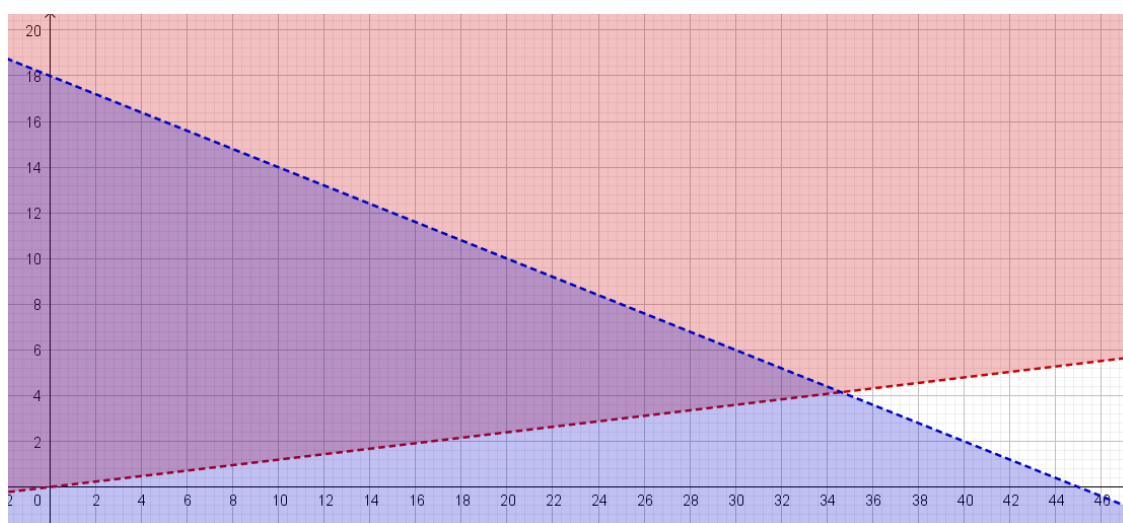
מה מספר העובדים המקסימלי שניתן להעסיק בתנאים אלה, ואיזה חלק מתקציב השכר ינוצל במקרה זה?

ג. בגרף הבא מתוארות האפשרויות למספרי העובדים במפעל. ציר x מבטא את מספר העובדים הזוטרים, וציר y את מספר העובדים הבכירים.

- היכן במערכת הצירים נמצאות נקודות המתאימות לסה"כ 18 עובדים בחברה?

מה מתאר הישר האדום מבחינת העובדים בחברה? מה מתארת הנקודה (3,25)?

- נסו להסביר מה מתארים התחומים מעל הקו האדום, מתחת לקו הסגול והתחום בין הקו האדום והסגול המשורטטים למשל מעלמתחת הקו המשופע.
- איך ניתן להיעזר בגרף על מנת לענות על סעיף ב.
- איך ניתן לראות בעזרת הגרף אם התקציב מנוצל במלואו?





TOP 15
מרחיבים את מעגל המצוינות
نوسع دائرة التميز



תוכן עניינים

1.....	הבעיה
4.....	כיצד נוצרה הבעיה?
4.....	למי הבעיה מיועדת?
4.....	ניתוח מיומנויות נדרשות
5.....	המלצות הפעלה
5.....	רמזים אפשריים
6.....	רעיונות נבחרים לפתרון
10.....	שאלות לדיון
10.....	במבט לאחור (לתלמידים)

כיצד נוצרה הבעיה?

הבעיה מדגימה מערכת של אי-שוויונות לינאריים בתוך בעיה אותנטית. ניתן לענות על שני הסעיפים הראשונים של הבעיה ללא שיקולים של גרפים ומערכת צירים. מטרת הסעיף השלישי להוסיף גם את ההתייחסות הזו.

למי הבעיה מיועדת?

לתלמידי כיתה ח' מצוינות, ט' מצוינות או הקבצה א'

ידע נדרש: בסעיפים א+ב נדרשת בעיקר חשיבה מספרית והבנה בסיסית של מושג היחס. בסעיף ג' נדרש ידע בפונקציה לינארית ובהבנת המשמעות של נקודה במערכת צירים. המספרים בבעיה זו לא קשים לחישוב, אך הם גם אינם מיידיים.

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים: רמה 4 ברמות פיזה.

נדרשת הבנת המשמעות של כל תנאי ושל השילובים בין התנאים.

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה: סעיף א': רמה 4 ברמת פיזה וסעיף ב': רמה 5 ברמת פיזה.

פתרון מערכת משוואות לינאריות עשוי לקדם תלמידים לקראת פתרון, אך הקשר בין מערכת המשוואות ומערכת האי-שוויונות איננו מובן מאליו. נדרשת גם יכולת לזהות ייצוגים מתאימים של פונקציות, שיבטיחו איתור האפשרויות ומיצויין בהקשר לתנאי הבעיה.

סעיף ג': רמה 5 ברמות פיזה.

נדרשת גמישות במעבר בין ייצוגים ופרשנות בהתאם. תלמידים ברמה זו מסוגלים לבחון ולהסביר את פרשנויותיהם ואת תהליך הסקת המסקנות שלהם.

הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך: רמה 5 ברמות פיזה.

לאחר פתרון המערכת האלגברית, יש להתאים את התשובה לאילוץ שהתשובות חייבות להיות מספרים שלמים. כמו כן, נדרשת יכולת לנמק איתור כל האפשרויות המקיימות את התנאים על תקציב השכר ועל היחס בין העובדים הזוטרים לבכירים. בסעיף ב' יש לנמק גם את מיקסום מספר העובדים. אם הדבר לא נעשה כבר בסעיף ב, אז בסעיף ג יש לקשור בין שיקולים מספריים לבין שיקולים אלגבריים.

המלצות הפעלה

- ▼ להפריד את סעיף ג מסעיפים א+ב. יש לאפשר חשיבה פתוחה לגמרי בשני הסעיפים הראשונים. בהחלט ניתן לענות על סעיפים אלו באופן מלא עם שיקולים מספריים.
- ▼ ניתן להיעזר בגיאוגברה או דסמוס לצורך חקירת המקרים האפשריים באופן גרפי. מצורף [קישור](#) ליישומן. שימו לב כי ביישומן בא לידי ביטוי גם האילוץ של המספרים השלמים, ולא רק האילוצים של האי שוויונות. מומלץ לתת את היישומן (אם בכלל) רק בשלב מתקדם של עבודה על הבעיה, או בשיח מסכם בעקבות העבודה על הבעיה.
- ▼ שימוש בטבלה או אקסל עשוי לסייע באיסוף מסודר של חישובים לקראת קבלת החלטות.
- ▼ המספרים בבעיה זו נבחרו כך שמצד אחד הם אינם מקשים על החישוב, אך הם גם אינם מיידים.
- ▼ שימו לב, בסעיף ב' ישנו יותר מפתרון אחד. לשיקול דעת המורה באיזה מהסעיפים, ב' או ג', תופנה לכך תשומת לב התלמידים.

רמזים אפשריים

- ▼ במקרה של קושי בהבנת הנתון על היחס בין מספר העובדים הבכירים למספר העובדים הזוטרים בסעיף ב', ניתן לשאול שאלות מנחות שיביאו את התלמידים להסתכל על הערך המספרי של היחס $6:50 = 0.12 = 3:25$.
- ▼ במקרה של קושי לאתר את הפתרונות בסעיף ב' אפשר להציע לפתור קודם את הבעיה: לצורך מיזם בחברה, נדרש כי מספר העובדים הזוטרים יהיה 30, ללא שינוי תנאי השכר ותקציבו. כמה עובדים בכירים יכולים להיות בהתייחס לתנאי הנוסף?

פתרון: יש שלוש אפשרויות. אפשר להגיע אליהן ע"י חישובים מספריים

שכר כולל	שכר בכירים	שכר זוטרים	היחס בין הבכירים לזוטרים	בכירים	זוטרים
400,000	100,000	300,000	$\frac{4}{30} > 0.12$	4	30
425,000	125,000	300,000	$\frac{5}{30} > 0.12$	5	30
450,000	150,000	300,000	$\frac{6}{30} > \frac{6}{50}$	6	30

אפשר גם להגיע בעזרת שימוש במערכת הצירים ושרטוט הישרים המתאימים
 אחר כך אפשר לשאול כמה אפשרויות יש בנתוני השאלה ל 35 עובדים.
 גם כאן יש שלוש אפשרויות (בכל שורה בטבלה מופיעה צורה אחרת לשימוש בנתון של היחס)

שכר כולל	שכר בכירים	שכר זוטרים	היחס בין הבכירים לזוטרים	בכירים	זוטרים
410,000	100,000	310,000	$\frac{4}{31} > \frac{3}{25}$	4	31
425,000	125,000	300,000	$\frac{5}{30} > 0.12$	5	30
440,000	150,000	290,000	$\frac{6}{29} > \frac{6}{50}$	6	29

וגם כאן ניתן לענות על ידי ניסוי וטעיה או על ידי שרטוט במערכת צירים.
 את השאלות האלו מומלץ גם לשאול למי שמתקשה בסעיף ג – והפעם לראות איך הגרף עוזר לענות על השאלות.

לתלמידים שכבר בפתרון סעיף ב' הולכים לכיוון של אי שוויונות ופתרון משוואות ניתן לשאול שאלות המתייחסות למשמעות הגרפית של הביטויים האלגבריים שהם כותבים.

▼ העבודה עם כפולות של 10,000 היא קצת מסורבלת. אמנם חלוקה ב 1000 (או 10000) לא מהווה פריצת דרך בפתרון הבעיה, אבל יכול להיות שיש תלמידים שהמספרים הגדולים מרתיעים אותם והמעבר למספרים קטנים יותר משחרר קצת את החשיבה ומאפשר להתרכז בבעיה.

▼ אם תלמידים מתקשים בסעיף ג' בהתייחסות לשאלה איפה במישור נמצאות נקודות המתאימות ל- 18 עובדים בחברה, אפשר להתחיל משאלות כמו: מה משמעות הנקודה (0,18), לכמה עובדים היא מתאימה, האם ישנן עוד נקודות שמתאימות למספר זה של עובדים.

רעיונות נבחרים לפתרון

▼ להגעה לפתרון סעיף א' אפשר לחשב את גובה השכר הכולל במקרים שונים של מספר זהה של עובדים זוטרים ובכירים :

מס זוטרים	מס בכירים	שכר זוטרים	שכר בכירים	שכר כולל
5	5	50000	125000	175000
6	6	60000	150000	210000
7	7	70000	175000	245000
8	8	80000	200000	280000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	12	120000	300000	420000
13	13	130000	325000	עובר את התקציב

תלמידים רבים אף פותרים סעיף זה בעזרת המשוואה $10000x + 25000x = 450000$ או אולי בעזרת אי שוויון. במקרים אלו יש להבין:

(א) מדוע פתרון המשוואה לא מתאים?

(ב) יש יותר מפתרון אפשרי אחד.

לפתרון סעיף ב' יש לאתר תחילה אפשרויות עבור מספר העובדים הזוטרים ומספר העובדים הבכירים, עבורם מתקיימים התנאים לגבי תקציב השכר ולגבי היחס בין מספר העובדים הבכירים ומספר העובדים הזוטרים.

הפתרון האופטימלי הוא 37 עובדים, זה יכול להתקבל בשתי דרכים שונות - 33 עובדים זוטרים ו-4 עובדים בכירים, או 32 עובדים זוטרים ו-5 עובדים בכירים. בשני המקרים התקציב לא מנוצל במלואו. תלמידים רבים פותרים גם סעיף זה עם שיקולים של ניסוי וטעיה, ובדיקות מספריות. מצורפות שתי אסטרטגיות לפתרון:

אסטרטגיה א, שיקולים השייכים לתחום המספרים. להתחיל רק עם עובדים בכירים, ולאט לאט להמיר כל 2 עובדים בכירים ב-5 זוטרים כל עוד נשמר התנאי על היחסגיה זו לא מספיקה בפני עצמה, שכן במעבר מ-6 עובדים בכירים ל-4 לא ניתן להוסיף 5 עובדים זוטרים, בגלל אילוץ על היחס בין מספר העובדים הבכירים לזוטרים. כיון שכך ניתן לבדוק בנפרד מה קורה כאשר מוותרים על עובד בכיר אחד (פתרון אופטימלי אחד) או על שניים (פתרון אופטימלי שני) בשיקולים אלו מובן כי לא מנצלים עד הסוף את התקציב.

אסטרטגיה ב, שיקולים אלגבריים: ישנם תלמידים שבשלב זה מתחילים להיעזר באלגברה, וגם מי שלא עשה זאת בסעיף ב' יצטרך לעשות זאת בסעיף ג. לצורך כך נעבור לייצוג אלגברי של התנאים ע"י סימון מספר העובדים הזוטרים ב- x ואת מספר העובדים הבכירים ב- y . מתקבלים אי השווינונות:

$$\begin{cases} 25000y + 10000x \leq 450000 \\ \frac{y}{x} > \frac{6}{50} \end{cases}$$

ולאחר צמצום וסידור אי השווינונות:

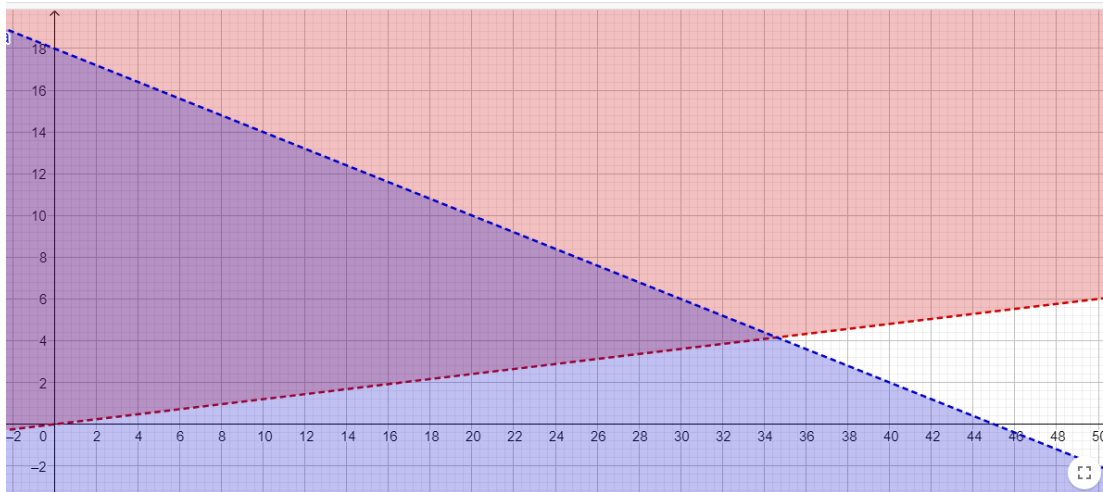
$$\begin{cases} y \leq -0.4x + 18 \\ y > 0.12x \end{cases}$$

נקודת המפגש בין 2 הישרים $y = 0.12x$, $y = -0.4x + 18$ היא בנקודה שערכיה הן בקירוב (34.61, 4.15) והיא יכולה להוות עוגן לחיפוש מספר העובדים המקסימלי שניתן להעסיק בתנאים הנתונים. אם נציע 34 עובדים זוטרים, מספר הבכירים יהיה לפחות 5, הצעה שגורמת לחריגה ממסגרת השכר הכולל ($340,000 + 125,000 > 450000$). לכן יש צורך להקטין את מספר העובדים הזוטרים (הגדלת מספר הזוטרים או הבכירים תגרום אף היא לחריגה ממסגרת השכר הכולל, הקטנה של מספר הבכירים בלבד לא תעמוד באילוץ של היחס). כאמור למעלה, ישנם שני פתרונות שונים עם מספר עובדים אופטימלי.

הערה: אפשר לציין שנקודת החיתוך אינה מתאימה משתי סיבות: אינה נקודת שריג והיא נמצאת על הישר $y = 0.12x$.

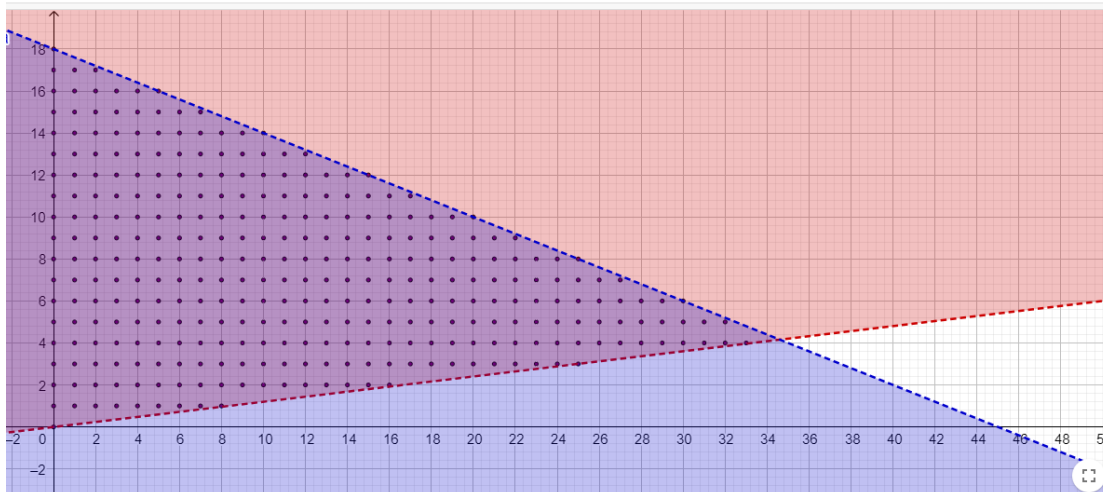
בסעיף ג אנו מבקשים בעצם להפנות את תשומת לב הפותרים לכך שבעצם אילוצי הבעיה מתאימים לאזורים במישור, וניתן להיעזר גם בשיקולים גרפיים לפתור את הבעיה. שרטוט הישר $y = 0.12x$ מאפשר לזהות את האזור במישור בו מתקיים $y > 0.12x$ ושרטוט הישר $y = -0.4x + 18$ מאפשר לאתר את האזור בו $y \leq -0.2x + 10$. האזור בין 2 הישרים וציר y , מקיים את 2 התנאים הנדרשים:

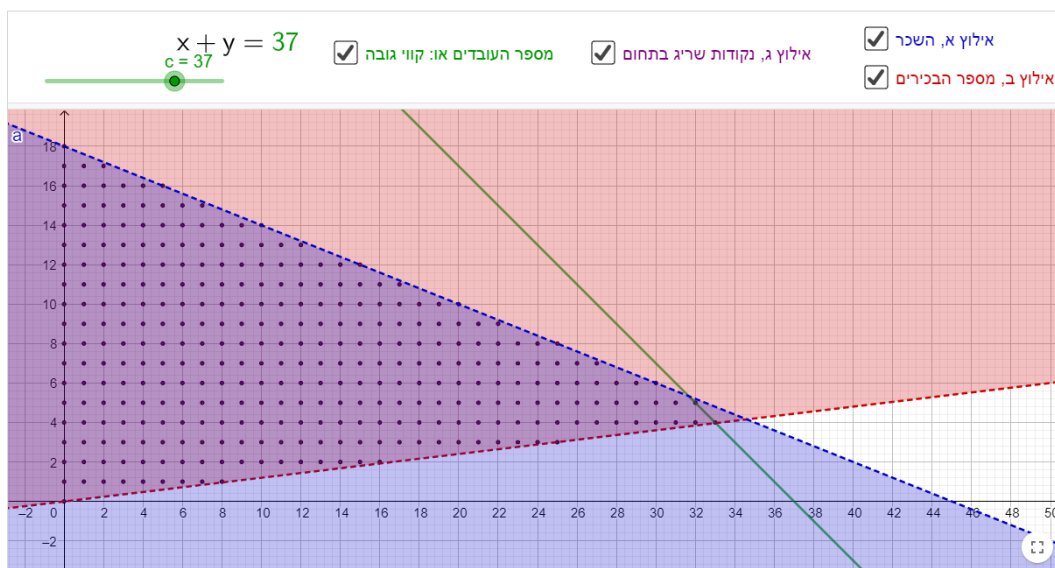
- אילוח ג, נקודות שריג בתחום אילוח א, השכר
 מספר העובדים או: קווי גובה אילוח ב, מספר הבכירים



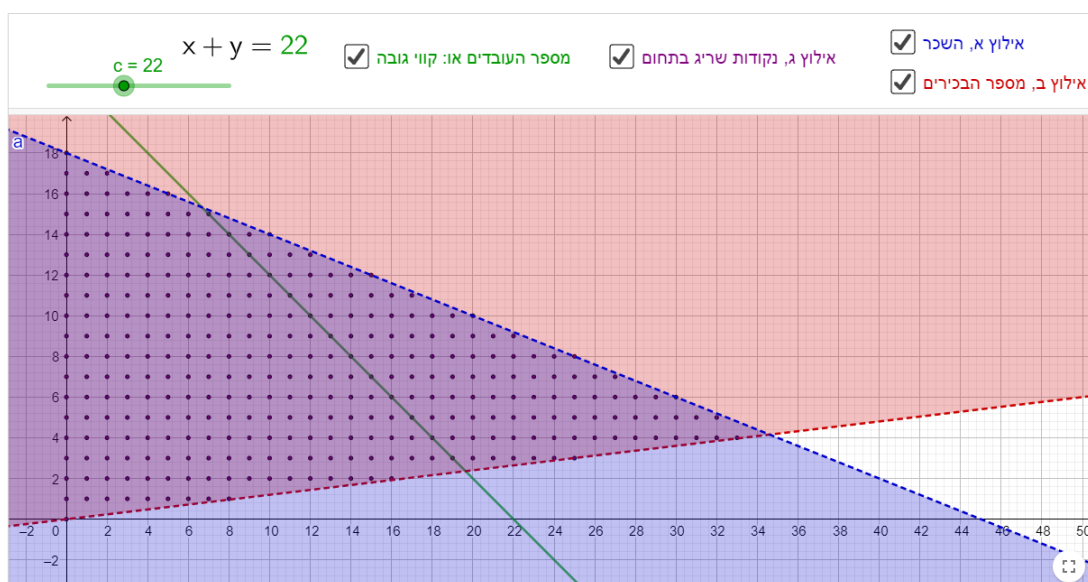
מכיוון שמספר העובדים צריך להיות מספר שלם באזור שאותו, יש לצמצם את מספר האפשרויות רק לנקודות השריג (נקודות ששיעוריהן הם מספרים שלמים) בתחום.

- אילוח ג, נקודות שריג בתחום אילוח א, השכר
 מספר העובדים או: קווי גובה אילוח ב, מספר הבכירים





ישר מהצורה $x + y = k$ מתאר את האפשרויות השונות ל k עובדים במפעל כאשר x מתוכם עובדים



זוטרים ו y מתוכם בכירים. מצורף שרטוט לדוגמה ובו $k = 37$:

אנו בעצם שואלים עד כמה ניתן להגדיל את k ולהשאר בתחום המתאים. אנו ממליצים להעזר ביישומן המצורף [בקיטור](#).

שימו לב כי עבור $k = 37$ עדיין יש נקודות בתחום הנמצאות על הישר (ויש 2 כאלו!) ועבור $k = 38$ הישר אמנם חותך את התחום, אבל לא בנקודות על השריג.

שאלות לדין

- אפשר להעלות לדין את הבעיות שמובאות תחת הכותרת 'רמזים אפשריים'
- אם דנים בשאלות אלו במסגרת מליאה, מומלץ לדון בהם גם בעזרת היישומון המצורף [בקישור](#)
- לשים לב כי בפתרונות האופטימליים לא מנצלים את מלוא התקציב. לשאול על החלק שנשאר מהתקציב, למצוא אפשרויות בהן התקציב מנוצל עד תום, אבל מספר העובדים לא מקסימלי.
- ל"מיטיבי לכת": לבקש לשנות אחד או יותר מהתנאים, באופן שלחברה יהיה מבחר גדול של אפשרויות לבחירה ולהסביר מהן מאפשרות לחברה במסגרת האפשרויות.

במבט לאחור (לתלמידים)

- כתבו מה למדתם מתהליך פתרון הבעיה.
- באילו חלקים במהלך פתרון הבעיה השתמשתם בייצוגים שונים (גרפי, טבלה, אלגברי, מילולי), ומה תרם כל ייצוג? מתי ובמה עזר לכם מעבר מייצוג לייצוג?