



משפחת פרבולות

הבעיה

נתונה משפחת פרבולות: $y = 0.5x^2 + bx + 2$, כאשר b הינו פרמטר שיכול לקבל כל ערך.

1. מסתבר שלא כל נקודות המישור יכולות להיות קודקוד של פרבולה מהמשפחה הנ"ל. שינוי פרמטר b יזיז את הקודקוד לאורך קו עקום. נסו ושערו: מה המשוואה של הקו הזה? האם תוכלו להוכיח זאת?

2. נבחר ערך שרירותי כלשהו עבור הפרמטר b , ונתבונן בפרבולה שמתקבלת לאחר הצבת הערך. כמה נקודות חיתוך יש לה עם העקום שמצאתם בסעיף הקודם? האם תשובתכם תלויה בערך של הפרמטר b ? נמקו את תשובתכם.



TOP 15

מרחיבים את מעגל המצוינות
نوسع دائرة التميز



תוכן עניינים

- 1..... הבעיה
- 3..... כיצד נוצרה הבעיה?
- 3..... ניתוח מיומנויות נדרשות
- 4..... המלצות הפעלה
- 5..... רעיונות לפתרון ורמזים
- 6..... שאלות לדין ולהרחבה

כיצד נוצרה הבעיה?

בהוראת הייצוג הפרמטרי של הפרבולה מוצגים לעיתים קרובות המשמעויות הגרפיות של פרמטרים a ו- c. הפרמטר b נותר לרוב ללא משמעות גרפית. העיסוק במשמעות הזו מוליד תכונה יפה של הפרבולה.

למי הבעיה מיועדת? תלמידי כיתה ט'

ידע קודם נדרש: כחלק מהוראת נושא הפרבולה. הבעיה מניחה היכרות בסיסית עם משוואת הפרבולה ועם מציאת קודקוד הפרבולה (על פי ייצוג קודקודי או הנוסחה לשיעורי הקודקוד). בנוסף השאלה מניחה היכרות עם המונח "משפחת פרבולות".

ניתוח מיומנויות נדרשות

הבנת הבעיה והנתונים, ובניית מודל שלה: רמה 5-6

ייצוג הנתונים כולל מקדמים מספריים + פרמטר – מופשט למי שלא רגיל לעבוד עם משפחות של פונקציות.

בנייה של מודל אלגברי לשאלת המשוואה של המקום הגאומטרי היא מאתגרת – מודל לא מפורש (רמה 5-6).

בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה: רמה 5-6

זיהוי העקום תוך שימוש בעקבות בגאוגברה הינו ברמה 3-4 (רצף פרוצדורות לא מפורש אבל מוכר).

פיתוח או הוכחה אלגבריים דורשים גישה שהינה חדשנית עבור תלמידים רבים, ודורשת הכללה ויחסים פורמליים (6).

הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך: רמה 5-6

בעיקר בסעיף 2, תלמידים נדרשים לתקשר את הטיעון המתמטי באופן מדויק, ולבדוק את התוצאה האלגברית מול הייצוג הגרפי של הבעיה.

המלצות הפעלה

שאלות אפשריות לחימום מקדים לפני הבעיה:

- האם שינוי הפרמטר b מייצר הזזה? האם שיקוף? האם מתיחה?
 - תשובות: השינוי מייצר הזזה תמיד. במקרים מיוחדים - כאשר ההזזה היא אופקית - ניתן לראות אותה כשיקוף דרך ציר ה- y , השינוי לא מייצר מתיחה.
- האם קודקוד הפרבולה יכול לקבל כל ערך של x ? האם הקודקוד יכול להיות בכל נקודה?
 - תשובה: כן לראשון, לא לשני
- מצאו ערך של הפרמטר b כך שקודקוד הפרבולה ימצא על הישר $y = 2x - 4$
 - עבור $b = -2$ הקודקוד יהיה בנקודה $(2, 0)$
 - עבור $b = 6$ הקודקוד יהיה בנקודה $(-6, -16)$

המטרה של שאלות אלו היא להפנות את תשומת הלב לקודקוד.

1. מומלץ לעבודה יחידנית או בזוגות. החלק הראשון בנוי על ניסוי וטעיה. בין אם בבדיקה ידנית של כמה נקודות או דרך תוכנה כמו גיאוגברה או דסמוס: כתיבה של משוואת הפרבולה עם הפרמטר פותחת מיד סרגל הזזה המאפשר לשנות את הפרמטר ולראות את ההזזה שהוא יוצר. את משוואת העקום שלאורכו נע הקודקוד אפשר לבדוק הצעות על ידי ניחוש משוואה מתאימה, ובדיקה "בעיניים" אם קודקוד הפרבולה נע לאורך המסילה או יוצא ממנה.

- אם מעוניינים בגישה מופשטת פחות אפשר לתת כסעיף מקדים או כרמז את המשימה הבאה:
- הציבו ערכים מספריים שונים במקום הפרמטר b , חשבו את קודקוד הפרבולה וסמנו את כל הקודקודים שמצאתם על מערכת צירים אחת.

ההוכחה לא הכרחית להמשך בסעיף 2, ואפשר לחזור אליה שוב בסוף. ניתן להשתכנע "בעיניים" בנכונות המשוואה של העקום מבלי להוכיח אותה. אם עושים זאת כדאי להדגיש ולציין במפורש שזה המצב. שהצלחנו להשתכנע, אולם טרם ראינו הוכחה.

כאן חשוב יותר עצם הדיון על ההוכחה, גם אם המסקנה שלו היא שעוד לא מצאנו אחת, מאשר מציאת ההוכחה עצמה.

2. כדאי להפנות את תשומת הלב לכך ש"הפרבולה המתקבלת לאחר ההצבה" היא לא הפרבולה שמצאנו בסעיף 1, אלא פרבולה כלשהי מהמשפחה.

את החלק השני מומלץ לערוך בקבוצות עבודה. כאן כדאי לתת דגש על ההנמקה. גם אם הקבוצה לא הגיעה לתשובה מלאה אלא רק להתחלה או רעיון של פתרון, ניתן להציג כיוון מחשבה זה מול הכיתה.

רעיונות לפתרון ורמזים

החלק הראשון

קודקוד הפרבולה זז לאורך עקום בצורת פרבולה שמשוואתו:

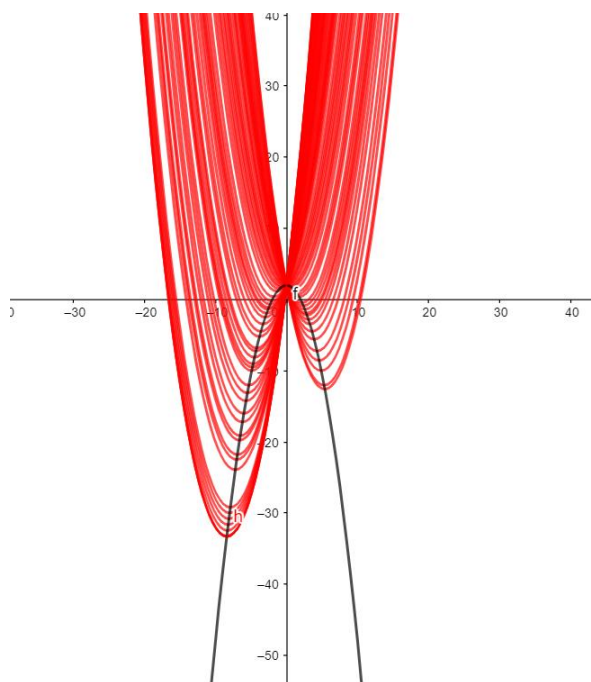
$$y = -0.5x^2 + 2$$

הוכחה: על ידי העברת הפרבולה לייצוג קודקודי:

$$0.5x^2 + bx + 2 = 0.5(x + b)^2 - 0.5b^2 + 2$$

כלומר שיעורי קודקוד הפרבולה הם:

$$(-b, -0.5b^2 + 2)$$



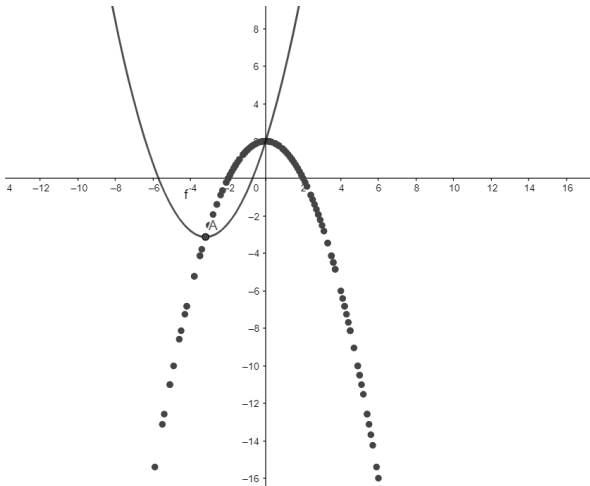
דרך נוספת היא למצוא ביטוי כללי לשיעור האיקס של קודקוד הפרבולה, ולהציב אותו במשוואה המקורית, וכך מגיעים לאותה התוצאה, או ע"י השלמה לריבוע להגיע לייצוג הקודקודי.

$$y = 0.5x^2 + bx + 2$$

$$y = 0.5(x + b)^2 + 2 - 0.5b^2$$

וכך מתקבלים שיעורי הקודקוד שמבטאים את הקו עליו נמצאים הקודקודים. מתקשר היטב למשמעות של הייצוג הקודקודי.

החלק השני



פתרון אלגברי: ניתן להשוות בין שתי המשוואות ולחקור את הדיסקרימיננטה:

$$\frac{1}{2}x^2 + bx + 2 = -\frac{1}{2}x^2 + 2$$

נקבל שני פתרונות: $0, -b$

כלומר לכל ערך של b שאינו 0 נקבל 2 נקודות חיתוך, ואם $b = 0$ נקבל נקודת חיתוך יחידה.

פתרון ללא חישובים אלגבריים:

העקום שמצאנו בסעיף א' הוא העקום עליו נמצאים כל קודקודי הפרבולות מהמשפחה. אם בחרנו אחת מהן, הרי שהקודקוד שלה יהיה על העקום - וזו נקודת החיתוך הראשונה. התבוננות במשוואות שתי הפרבולות מראה שלשתייהן אותה נקודת חיתוך עם ציר y . לכן זו תהיה נקודת החיתוך השנייה.

אם קודקוד הפרבולה נמצא על ציר y (מה שקורה כאשר $b = 0$) נקבל ששתי נקודות החיתוך מתלכדות. ומכיוון שלשתי פרבולות שונות יכולות להיות שתי נקודות חיתוך לכל היותר - אין נקודות חיתוך נוספות.

שאלות לדיון ולהרחבה

ניתן להכליל את החלק הראשון (מציאת נוסחת העקום) בכמה דרכים. הכללה אחת מבררת כיצד העקום תלוי בערכים הנתונים $a=0.5, c=2$, ולגלות כי עבור הפרבולה $ax^2 + bx + c$ שינוי פרמטר b יזיז את הפרבולה לאורך הפרבולה $-ax^2 + c$

כיוון אחר להכללה יכול לבחון שינוי בין פרמטרים תלויים, למשל: היכן נמצא הקודקוד של פרבולה מהצורות $y = bx^2 + bx + b$, $y = x^2 + bx + b$, $y = bx^2 + bx + 2$, וכיו"ב.

$$y = bx^2 + bx + b$$

$$y = x^2 + bx + b$$

$$y = bx^2 + bx + 2$$