



## מעליות קורונה

### הבעיה

בזדלנד יש מגדל תירותי מפורסם בשם מגדל אפסילון, ממנו נשקף נוף מרהיב.

בעידן הריחוק החברתי יש היתר להשתמש במעלית כל עוד הנוסעים עוטים מסכה ושומרים על מרחק של לפחות מטר אחד בין אדם לאדם.

1. במגדל יש מעלית בצורת תיבה שרצפתה ריבוע שאורך צלעו 1.4 מ'. מה המספר הגדול ביותר של נוסעים שאפשר להסיע במעלית תחת האילוצים, וכיצד ניתן להסיע אותם? מדוע זה המספר הגדול ביותר האפשרי?

2. בעלי המגדל מתכננים לבנות מעלית חדשה שתעבור במרכז המגדל, ורצפתה תהייה מעגלית. כדי שבנייתה תהייה משתלמת, עליה להכיל לפחות שבעה נוסעים. מה רדיוס המעגל המינימאלי שיעמוד בדרישות? הוכיחו את טענתכם!

3. הוחלט להוסיף עוד מעלית חיצונית למגדל ששטח רצפתה יהיה 3 מ"ר. באיזו צורה כדאי לבנות את המעלית כדי שניתן יהיה להסיע כמה שיותר נוסעים? כמה נוסעים היא תוכל להסיע?



**TOP 15**  
מרחיבים את מעגל המצוינות  
نوسع دائرة التميز



## תוכן עניינים

1.....	הבעיה
3.....	כיצד נוצרה הבעיה?
3.....	ניתוח מיומנויות נדרשות
3.....	המלצות הפעלה
4.....	רמזים אפשריים
4.....	רעיונות נבחרים לפתרון
5.....	שאלות לדיון

## כיצד נוצרה הבעיה?

במעליות מצוין משקל ומספר נוסעים מקסימאלי. לעיתים מניחים שיש קשר בין המספרים, למשל שמספר הנוסעים נגזר מהמשקל המירבי וממשקל ממוצע של בן אדם. עידן הריחוק החברתי מזכיר פרשנות אחרת (ונכונה) – המטרה של הגבלת המספר הנוסעים היא למנוע צפיפות!

## ניתוח מיומנויות נדרשות

**הבנת הבעיה והנתונים, ובניית מודל שלה:** רמה 5-6 ברמות פיזה

תלמידים צריכים להניח הנחות לגבי שמירה של מרחק (בין פה לפה? המרחק המינימאלי בין חלקי גוף? מרחק אופקי?)

**בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה:** רמה 6 ברמות פיזה

אין אסטרטגיה ברורה, יש לבחור מבין רבות אפשריות, כאשר קשה לצפות אם תתברר כמועילה. נדרש תחכום לבנות הוכחה מוצקה לכך ש"אי אפשר" לעשות משהו. היפוך הבעיה בסעיף 2 (נתון מספר נוסעים וצריך לתכנן מעלית).

**הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך:** רמה 6 ברמות פיזה

לתקשר את פרטי ההוכחה (סעיף 1), להחליט כמה צרה יכולה להיות מעלית במציאות (סעיף 3)

## המלצות הפעלה

זו בעיה שמאפשרת דיון ברמות שונות של מורכבות מתמטית, ועם הרבה אפשרויות לפרשנות. לכן היא מתאימה לעבודה בקבוצות קטנות. כך אפשר לתת לכל קבוצה להתקדם בקצב שלה, לאפשר דיון ושמיעת רעיונות של אחרים, וזאת בלי להציף את הכיתה בוויכוחי סרק על פרשנויות רבות ושונות.

מדי כמה זמן אפשר לעצור את העבודה בקבוצות כדי לדון במליאה על רעיון נבחר אחד מכל אחד מהסעיפים.

השאלה הראשונה היא כזו שקל יחסית למצוא את תשובה בשיטות של ניסוי וטעיה, אבל קשה יותר לנמק מדוע זהו מספר הנוסעים המקסימלי, וודאי להוכיח זאת. מומלץ להתאים את דרישות קפדנות ההוכחה לתלמידים, ולאחר העבודה העצמית לדון בשאלת המקסימליות. איך אנחנו יודעים שזהו פתרון מקסימלי? עד כמה אנחנו בטוחים בזה? איך נוכל להוכיח זאת?

ללא היכרות עם עקרון שובך היונים קשה מאוד להוכיח ממש את המקסימליות של הפתרון. לכן הדיון בהוכחה אם מתקיים כדאי שיהיה כללי יותר, ומתמקד בשאלות שעולות ומחדדות את הצורך בהוכחה, ולא בדרישה להציג הוכחה שלמה.

השאלה השנייה היא יישום של העקרונות שהוצגו בשאלה הראשונה במצב מאוד דומה אך מעט מורכב יותר. כדאי להפנות את תשומת הלב לקשר שיש בין השאלה הראשונה לשנייה: לדרוש מספר נוסעים מקסימלי בשטח נתון זה דומה לדרישה של שטח מינימלי במספר נוסעים נתון. כלומר יש לנו שני פרמטרים שאפשר לקבוע אחד מהם ולדרוש משהו לגבי השני.

השאלה השלישית מאפשרת יצירתיות רבה. אפשר אפילו לערוך מעין "תחרות" בין הקבוצות השונות ולראות מי מהקבוצות מצליחה לחשוב על צורה שתכיל יותר אנשים (במקרה כזה אולי כדאי להגדיר הגבלה לרוחב המעלית - או להביא מראש בחשבון ריבוי אפשרי של תשובות יצירתיות). גם כאן לעבודה בקבוצות קטנות יש יתרון.

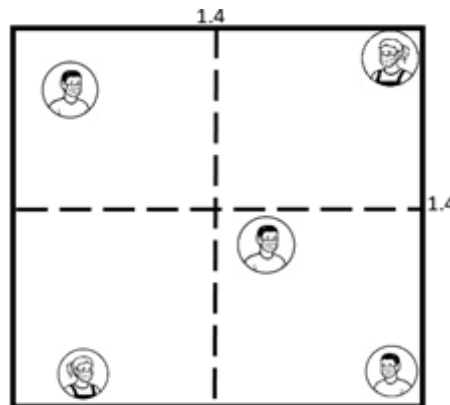
## רמזים אפשריים

קושי אפשרי בשאלה הראשונה הוא במעבר ממידות אורך ורוחב של המעלית הנתונות, למדידת אורך "באלכסון". הדבר כמובן דורש שימוש במשפט פיתגורס - וניתן להזכיר זאת כרמז.

לאחר הדיון בשאלה הראשונה אפשר לנסח את "עקרון שובך היונים" (המופיע ברעיונות לפתרון) ולהציג אותו לתלמידים כגישה אפשרית לפתרון בעיות, וכרמז לבעיה השנייה, שניתן לפתור באמצעות אותו עיקרון. שאלת המפתח ביישום עקרון שובך היונים כאן היא "מה הוא השובך?". כלומר - איך כדאי לחלק את המעלית לחלקים.

## רעיונות נבחרים לפתרון

1. צפוי שרוב התלמידים יגלו שאפשר להסיע 4 נוסעים בפינות המעלית, וזאת תחת הנחות מגוונות לגבי אופן מדידת המרחק בין נוסעים. קשה להוכיח שחמישה נוסעים בהכרח יפרו את כלל הריחוק. דרך אפשרית נשענת על "עקרון שובך היונים". נחלק במחשבה את רצפת המעלית לארבעה ריבועים חופפים. אם ננסה להסיע חמישה נוסעים, לפחות באחד הריבועים הקטנים יהיו לפחות שני נוסעים. המרחק ביניהם יהיה לכל היותר אלכסון הריבוע הקטן, שהוא פחות ממטר אחד.



יתכן שתלמידים ייצאו מתוך פתרון אפשרי להסעת 4 נוסעים (בפינות המעלית), ויטענו שנוסע חמישי חייב להיות קרוב מדי לאחד מארבעת הנוסעים בפינות. טיעון זה מניח הנחה סמויה, למשל "בכל מעלית ריבועית שבה ניתן להסיע  $X$  נוסעים, ו- $4 < X$ , ניתן לעשות זאת כאשר ארבעה מהם נמצאים בפינות המעלית. יתכן שהנחה זו נכונה, אך כלל לא ברור כיצד להוכיח אותה, ולכן הטיעון לא מלא. נציין עוד שתלמידים עשויים לפרש בדרכים שונות את האופן שבו מודדים מרחק בין נוסעים: מרחק בין פה לפה (אז ניתן לחשוב על נוסע כעל "נקודה" ולהתעלם מהממדים שלו), מרחק מינימאלי בין חלקי גוף (ואז יש צורך להתחשב בגודל של גוף במרחב). יתכן שתלמידים אשר חושבים על מרחק בין פיות הנוסעים יציעו לנצל את מימד הגובה של המעלית, ולהסיע חלק מהנוסעים בישיבה וחלקם בעמידה.

תלמידים אלה יזדקקו למשפט פיתגורס המוכלל כדי לחשב מרחקים, ובהתאם להנחות שלהם עשויים להצליח להסיע נוסע חמישי!

2. הדרך החסכונית ביותר (מבחינת שטח רצפת המעלית) להסיע 7 נוסעים היא לסדר 6 מהם בקודקודים של משושה משוכלל ואחד מהם במרכז המשושה. רדיוס ריצפת המעלית המתאימה תלוי בהנחות של תלמידים לגבי מדידת מרחקים. בתור מינימום, הרדיוס צריך להיות מטר אחד. הוכחה שאי אפשר להסיע במעלית קטנה יותר יכולה להתבסס על אותו העקרון – אם נחלק את המעגל לשישה "פלחים", ונסה להסיע 7 או יותר נוסעים, לפחות פלח אחד יצטרך להכיל לפחות שני נוסעים. המרחק הגדול ביותר שיכול להיות בין שני נוסעים בפלח אחד הוא רדיוס המעגל, ולכן רדיוס זה חייב להיות לפחות מטר אחד.

3. סעיף 3 מחייב תלמידים להניח הנחות מציאותיות לגבי ממדים של מעלית, שכן כבעיה מתמטית מופשטת ונטולת הקשר, אין מגבלה על מספר נוסעים "נקודתיים" שניתן להסיע במלבן בעל שטח נתון. מלבן מאד ארוך ומאד צר (למשל באורך של 3000 מטרים וברוחב של 1 מ"מ) יכול הרבה מאד נקודות במרחק של לפחות מטר זו מזו (במקרה הזה 3001 נקודות כאלה), אך יהיה בלתי אפשרי לבנות מעלית כזאת או להסיע בה אנשים. הנחה של 30 ס"מ רוחב (צפוף, אבל אולי אפשרי) תאפשר, למשל, 11 נוסעים בשורה.

## שאלות לדיון

- היכן אנחנו נתקלים בעקרון שובך היונים בהקשרים נוספים? (במתמטיקה ובחיים בכלל)
- אילו מושגים היה עלינו להגדיר היטב כדי לדון בשאלה?
- ההבדל בין תיאוריה למציאות. מתי פתרון תיאורטי הופך להיות לא פרקטי? אילו דרישות אפשר לנסח לסעיף 3 כדי שהפתרונות יהיו גם מעשיים?