



## 606 העתקה

### הבעיה

לאחר שעסקה בפתרון משוואות ריבועיות, נתנה המורה דינה בוחן פתע – לפתור משוואה מהצורה:

$$x^2 + bx + c = 0$$

ליסמין יצאו שני פתרונות:  $x_{1,2} = 2, 3$

לריף יצאו שני פתרונות:  $x_{1,2} = 1, -6$

לדולב יצאו שני פתרונות:  $x_{1,2} = 3, -6$

מסתבר שכל התשובות שגויות!

אחד מהתלמידים טעה בדרך ולא קיבל ניקוד. השניים האחרים טעו טעות קטנה בהעתקת המשוואה מהלוח, אבל פתרו נכון, ולכן קיבלו 9 נקודות מתוך 10.

מי מהתלמידים טעה בדרך? מה לדעתכם הייתה המשוואה שניתנה?



## תוכן עניינים

|        |                        |
|--------|------------------------|
| 1..... | הבעיה                  |
| 3..... | כיצד נוצרה הבעיה?      |
| 3..... | ניתוח מיומנויות נדרשות |
| 3..... | המלצות הפעלה           |
| 4..... | רמזים אפשריים          |
| 4..... | רעיונות נבחרים לפתרון  |
| 5..... | שאלות לדיון            |
| 5..... | במבט לאחור (לתלמידים)  |

## כיצד נוצרה הבעיה?

הבעיה מבוססת על שאלה שהופיעה בספר

Lehoczyk, S., & Rusczyk, R. (2004). *The Art of Problem Solving*. AoPS Incorporated.

**למי הבעיה מיועדת?** לתלמידי כיתה ט' (מצוינות או הקבצה א')  
**ידע נדרש:** היכרות עם משוואה ריבועית וביטויים ריבועיים, פתרונות של משוואה ריבועית ומשמעותם, פירוק לגורמים לפי טרינום וחוק הפילוג המורחב.

## ניתוח מיומנויות נדרשות

**הבנת הבעיה והנתונים, ובניית מודל:** רמה 5-6 ברמות פיזה  
הבנת הסיטואציה דורשת הכרות עם פירוק לגורמים וחוק הפילוג המורחב, ניסיון של עבודה עם ביטויים ריבועיים וזיהוי טעויות אפשריות כאשר מפרקים לגורמים.  
התלמידים צריכים להניח הנחות לגבי סוג הטעות שתחשב "טעות העתקה".

**בחירת אסטרטגיה לפתרון ויישומה:** רמה 5  
אין אסטרטגיה ברורה, יש לבחור מבין ריבוי אפשרויות, כאשר קשה לצפות אם האסטרטגיה תתברר כמועילה.  
**מיומנות נדרשת בפתרון הבעיה** היא חשיבה הפוכה, התלמידים יכולים לנסות ולחשוב מהן המשוואות הריבועיות שלהן הפתרונות שמתאימים לכל אחת מהתשובות של התלמידים, ולבדוק מי מהפתרונות אכן תואם את תשובות התלמידים.

**הערכת הפתרון, רפלקציה על הדרך:** רמה 4  
יש לבצע פרשנות/הערכה בסיסית לברר אם המשוואה "המקורית" שנמצאה אכן מאפשרת טעויות העתקה שמובילות לטעויות של התלמידים.

## המלצות הפעלה

- כדאי להפעיל את הבעיה כסיכום של נושא הפירוק לגורמים לפי טרינום אך אפשר גם תוך כדי לימוד נושא זה.
- הפעלת הבעיה בשלב ראשון כעבודה עצמית (בבית/בכיתה על פי מגבלות הזמן)
- דנים באסטרטגיות שונות של תלמידים שונים, כיצד עבדו עם המשוואות/הפתרונות כדי להגיע לפתרון? ממה היה קל יותר להתחיל? כיצד הגיעו למסקנות?
- דנים עם התלמידים לגבי הגורמים שיכולים היו לגרום לטעויות של התלמידים שפתרו את התרגיל. מה קושר בין כל המקרים האלה?

- שואלים את התלמידים שפתרו, כיצד ניתן לבדוק אם המשוואה שמצאו היא אכן המשוואה שהמורה כתבה על הלוח.

## רמזים אפשריים

- מהי המשמעות של פתרון משוואה בכלל ומשוואה ריבועית בפרט?
- איזה סוגי פירוקים לגורמים אתם מכירים?
- חישוב אילו משוואות מתאימות לפתרונות של כל אחד מהתלמידים.
- כיצד תוכלו לדעת אם מצאתם את המשוואה הנכונה. ואם לא מצאתם, כיצד תוכלו לתקן?

## רעיונות נבחרים לפתרון

יש דרכי פתרון מגוונות.

- פירוק הטרינום: לשחזר איזו משוואה כל אחד מהתלמידים פתר, בהנחה שהם אחד מהשניים שטעו רק בהעתקה. בהנחות אלה:

- יסמין, שיצאו לה פתרונות 2, 3, פתרה את המשוואה  $(x - 2)(x - 3) = x^2 - 5x + 6 = 0$
- ריף, שיצאו לו פתרונות 1, -6 פתר את המשוואה  $(x - 1)(x + 6) = x^2 + 5x - 6 = 0$
- דולב, שיצאו לה פתרונות 3, -6, פתרה את המשוואה  $(x - 3)(x + 6) = x^2 + 3x - 18 = 0$

שתי המשוואות הראשונות דומות, ולכן כנראה בהן נפלה טעות ההעתקה. כיוון ששתי המשוואות מסכימות על המקדמים, ולא על הסימנים (+/-), המשוואה המקורית הייתה ככל הנראה  $x^2 + 5x + 6 = 0$  או  $x^2 - 5x - 6 = 0$

- המשמעות של פתרון של משוואה: בהנחה ש-2 ו-3 הם פתרונות של המשוואה אותה העתיקה יסמין, ניתן לשחזר את המקדמים על ידי הצבה, כלהלן:

- 2 הוא פתרון, ולכן מתקיים:  $2^2 + 2b + c = 0$
- 3 הוא פתרון, ולכן מתקיים:  $3^2 + 3b + c = 0$
- פתרון המערכת הנ"ל מגלה:  $b = -5; c = 6$
- באופן דומה ניתן לשחזר את המשוואות שכל אחד מהאחרים פתר, בהנחה שפתר נכון ורק טעה בהעתקה.

- את הפתרון הראשון אפשר "לקצר" בשימוש בנוסחת ויאטה, יחד עם הנתון שהמקדם העליון הוא 1:

$$\text{כלומר: } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ ו- } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

לכן, במקרה שלנו שבו  $1 = a$  סכום הפתרונות שווה ל-(-b) ומכפלתם שווה ל-c. לסיכום: המקדם b שווה לסכום השורשים בהיפוך סימן, והמקדם c שווה למכפלת השורשים.

## שאלות לדיון

הדיון בבעיה יכול לעסוק בסוגיות הבאות:

- כיצד ניגשתם לבעיה? מה היו פעולותיכם הראשונות? האם הן קידמו אתכם? אם לא, מה עשיתם אחר כך?
- באיזו מידה אתם בטוחים בתשובה שאליה הגעתם? מה יגדיל את מידת הביטחון שלכם?
- מהי המשמעות של פתרון משוואה בכלל ומשוואה ריבועית בפרט.
- האם יכולות להיות משוואות ריבועיות שונות שלהן אותם פתרונות?
- האם ניתן לפרק ביטוי ריבועי לפי טרינום באופנים שונים? ובפרט, האם ניתן לפרק ביטוי ריבועי לפי טרינום בשני אופנים לשם פתרון משוואה וכך להגיע לפתרונות שונים?
- לתלמידים שלמדו כבר על **הפונקציה** הריבועית – מה הקשר בין הפירוק לפי טרינום לבין הגרף של הפונקציה הריבועית?

## במבט לאחור (לתלמידים)

כדאי לבקש מכל תלמיד/ה לכתוב רפלקציה על תהליך העבודה:

- באילו אסטרטגיות השתמשתם לפתרון הבעיה?
- מה למדתם במהלך פתרון הבעיה? (איזה רעיון חדש, או דרך עבודה מעניינת ויעילה?)
- מה הביא לפריצת הפתרון, ההוכחה, ההנמקות?